

الحساب المثلثي - الجزء 1

الدورة الأولى
15 ساعة

- القدرات المنتظرة**
- * استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس.
 - * التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين 1

نعتبر الشكل التالي حيث $OA = 4$ و $AB = 3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :

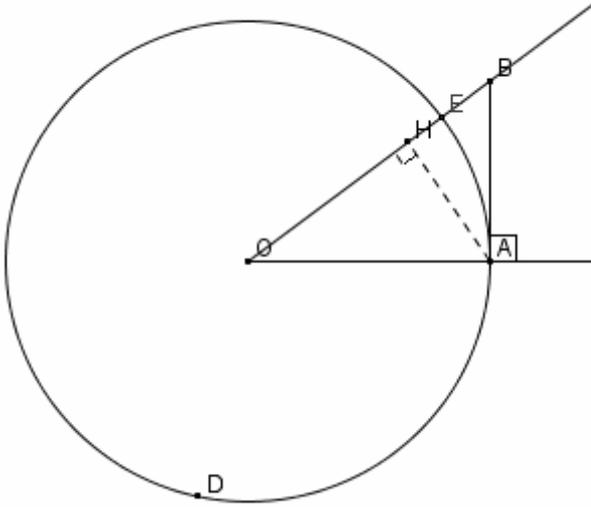
1- أحسب OB

2- أ/ أحسب $\cos(\widehat{AOB})$ ثم استنتج قيمة مقربة

لقياس الزاوية $[\widehat{AOB}]$

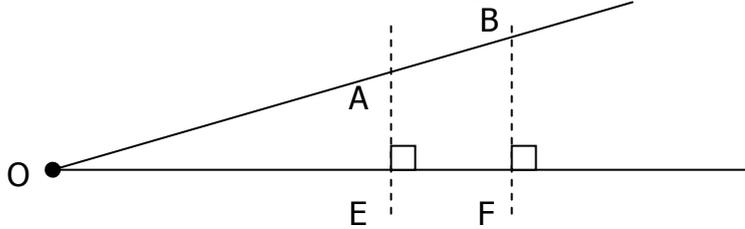
ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan(\widehat{AOB})$ ثم استنتج $\sin(\widehat{AOB})$



تمرين 2

نعتبر الشكل التالي بحيث $AB = 5$ و $EF = 4$



أحسب $\cos(\widehat{AOE})$ ثم استنتج $\sin(\widehat{AOE})$

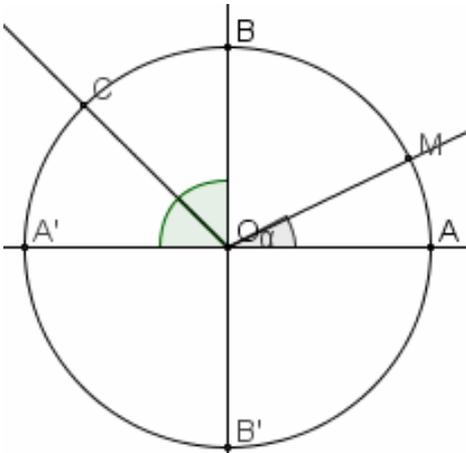
1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية - زاوية مركزية

1- أنشطة

لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R . نعتبر A و B و C

و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية

بالدرجة $[\widehat{AOM}]$



1- اتمم الجدول التالي

[AOM]	[AOB']	[AOC]	[AOB]	[AOA']	الزاوية المركزية
α°					قياس الزاوية المركزية بالدرجة
l					طول القوس الهندسية المرتبطة بها

2- بين أن 180° و 90° و 135° و 270° متناسبة πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R .

حدد β قياس الزاوية المركزية $[AOM']$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

$$\pi rd = 200gr = 180^\circ \quad (gr : \text{يرمز للград})$$

ملاحظة

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالград فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ **قياس قوس هندسية** قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR .

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين 1

اتمم الجدول التالي

0°	30°	45°		90°	قياس زاوية بالدرجة
			$\frac{\pi}{3}$		قياسها بالراديان

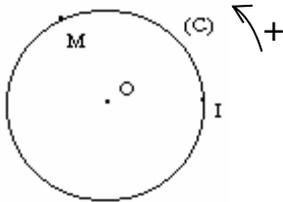
تمرين 2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر

من B . أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $[BAC]$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوي

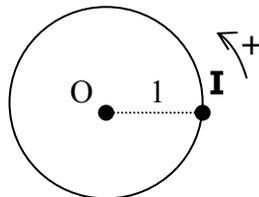


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C) .
لو أردنا أن ننتقل من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحنين.
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحنيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المنحى المعاكس لحركة عقارب الساعة.
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C) .

عندما توجه جميع دوائر المستوي توجيهها موحدنا فإننا نقول إن المستوي موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها 1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيهها موجبا.



III- الأفاصل المنحنية.

1- الأفاصل المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثية

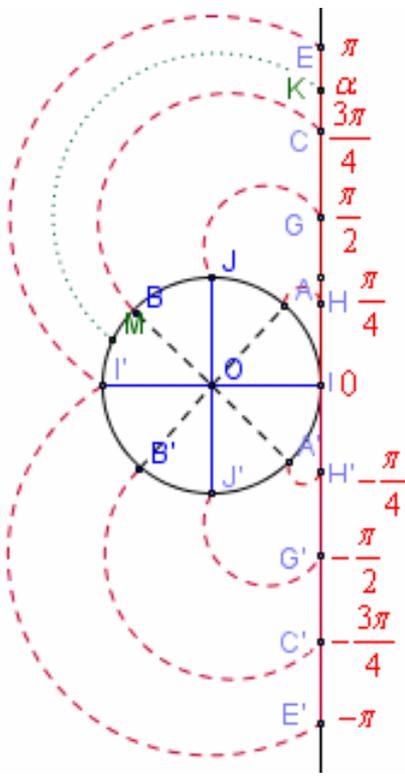
لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I . نعتبر المجال $]-\pi; \pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي

على (OI) . حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لفنا القطعة الممثلة للمجال $]-\pi; \pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi; \pi]$ ينطبق

مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi; \pi]$

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M



خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I .

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi; \pi]$ و كل

عدد α من $]-\pi; \pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C) .

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $[IOM]$ هو $|\alpha|$ راديان

تمرين 1

على دائرة مثلثية (C) أصلها I . أنشئ النقط A و B و C و

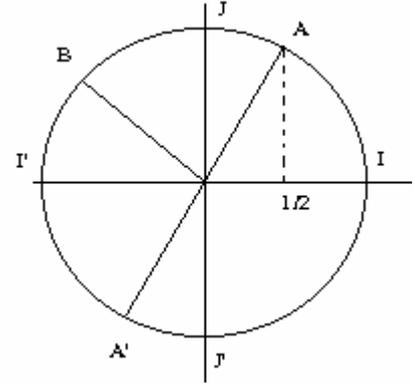
D و E و F و G و H التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و

$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

تمرين 2

(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفصيل المنحنية الرئيسية

لنقط $A; A'; J; J'; I'; I'$ كما يلي



2- الأفصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثية

نعتبر (C) دائرة مثلثية أصلها I . نعتبر المحور $(\Delta) = D(I, E)$

حيث $(OI) \perp (\Delta)$.

لتكن نقطة M من (C) أفصولها المنحني الرئيسي α .

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع M اذا لفنا المستقيم العددي

على (C)

نلاحظ اننا اذا لفنا المستقيم العددي الممثل لـ \mathbb{R} على (C) النقطة M

تنطبق مع الأعداد

..... $\alpha - 4\pi$; $\alpha - 2\pi$; α ; $\alpha + 2\pi$; $\alpha + 4\pi$

كل هذه الأعداد تسمى الأفصيل المنحنية لنقطة M

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام على شكل $\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

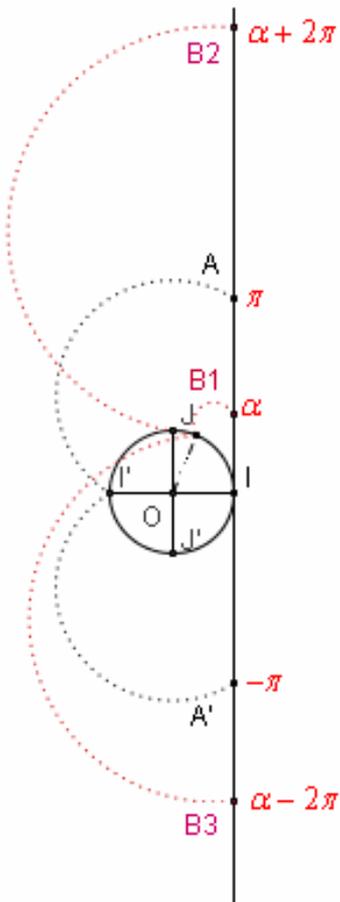
تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I . وليكن α

أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha + 2k\pi$ بحيث k عنصر من \mathbb{Z}

يسمى أفصولا منحنيًا للنقطة M .



تمرين حدد الأفاصل المنحنية للنقطتين A و B ذات الأفاصل المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$

على التوالي

تمرين دائرة مثلثية أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحني لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I . وليكن α أفصولها المنحني الرئيسي بين اذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من \mathbb{Z} بحيث $x - y = 2\lambda\pi$

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من \mathbb{Z} بحيث $x - y = 2\lambda\pi$

و نكتب $[2\pi]$ $x \equiv y$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π .

- إذا كان x أفصول منحني للنقطة M فان جميع الأفاصل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفاصل المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصلها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثية النقط $A; B; C$ التي أفاصلها المنحنية على التوالي هي

$$7\pi ; \frac{37\pi}{3} ; \frac{-108\pi}{12}$$

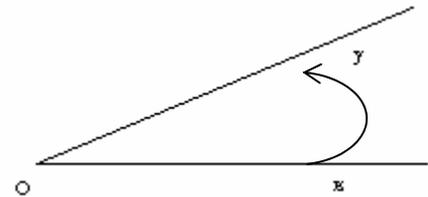
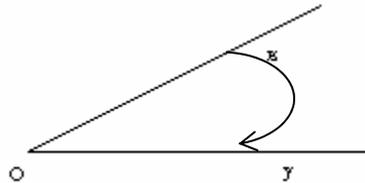
تمرين أنشئ على الدائرة المثلثية النقط M_k التي أفاصلها المنحنية $-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

IV- الزوايا الموجهة

4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

في المستوى الموجه نعتبر $[O; x[$ و $[O; y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل الزوج $([O; x[; [O; y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\overline{Ox; Oy})$



ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

تعريف وخاصة

لتكن $(\overline{Ox; Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C)

دائرة مثلثية مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي

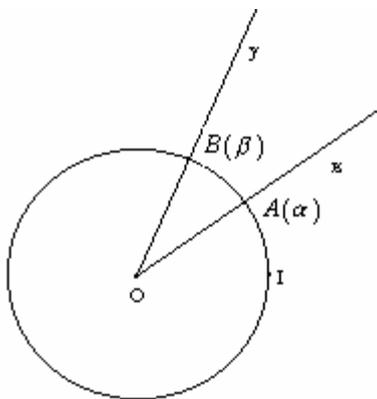
مستقيم $[O; x[$ و $[O; y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta - \alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{Ox; Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{Ox; Oy})$.



نرمز لقياسات الزاوية $(\overline{Ox; Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox; Oy})$ نكتب $k \in \mathbb{Z}$ $(\overline{Ox; Oy}) = \beta - \alpha + 2k\pi$

و نكتب أيضا $[2\pi]$ $(\overline{Ox; Oy}) \equiv \beta - \alpha$

خاصة و تعريف

لكل زاوية موجّهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi; \pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجّهة.

خاصة

إذا كان θ قياس للزاوية الموجّهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فإن $\theta + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ قياس للزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.
إذا كان α و β قياسين للزاوية الموجّهة $(\widehat{Ox;Oy})$ فإن $\alpha - \beta \equiv 0 \pmod{2\pi}$
أي $(k \in \mathbb{Z} / \alpha - \beta = 2k\pi)$

ملاحظات

* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فإن الأضلاع المنحنية للمنحنى للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجّهة $(\widehat{OI;OM})$ و أن الأضلاع المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجّهة $(\widehat{OI;OM})$

* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجّهة $(\widehat{Ox;Oy})$ هي قياس الزاوية الهندسية (\widehat{xOy}) .

بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة

$$(\widehat{Ox;Ox}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

الزاوية المستقيمة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \pi \pmod{2\pi} \quad (\widehat{Oy;Ox}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

الزاوية القائمة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية قائمة موجبة

$$(\widehat{Ox;Oy}) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية قائمة سالبة.

تمرين

- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\frac{601\pi}{6}$; $\frac{-143\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$
- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجّهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\frac{52\pi}{5}$; $-\frac{25\pi}{3}$
- أنشئ زاوية موجّهة $(\widehat{Ox;Oy})$ قياسها $-\frac{234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $(\widehat{AB;AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فإن

$$(\widehat{Ox;Oy}) + (\widehat{Oy;Oz}) \equiv (\widehat{Ox;Oz}) \pmod{2\pi}$$

نتائج

* إذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فإن $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv -(\widehat{Oy;Ox}) \pmod{2\pi}$

* إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv (\widehat{Ox;Oz}) \pmod{2\pi}$ فإن $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه إذا كان $[Ox]$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O; y]$ بحيث $[2\pi]$ $(\widehat{Ox; Oy}) \equiv \alpha$.

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه و $[O; x]$ و $[O; y]$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين \vec{u} و \vec{v} .

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u}; \vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox; Oy})$ و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{Ox; Oy})$.

علاقة شال ونائجها

علاقة شال

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}; \vec{w}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$$

نتائج

- * إذا كان \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين فان $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv -(\widehat{\vec{v}; \vec{u}}) \quad [2\pi]$
 - * إذا كانت \vec{u} و \vec{v} و \vec{w} ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) \equiv (\widehat{\vec{u}; \vec{w}}) \quad [2\pi]$
- فان \vec{v} و \vec{w} مستقيمتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I . نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصلها

$$\text{المنحنية} \quad A(\pi) \quad B\left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad E\left(\frac{23\pi}{4}\right) \quad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$$

أعط قياسا لكل من الزوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\widehat{OA; OA}) ; (\widehat{OB; OA}) ; (\widehat{OA; OE}) ; (\widehat{OE; OF})$$

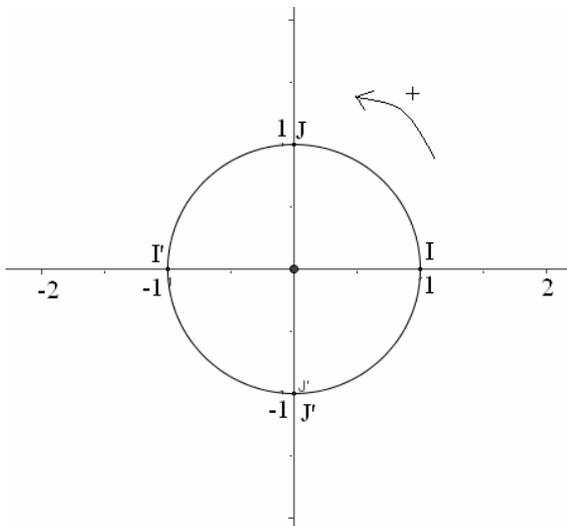
V - النسب المثلثية

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثية

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O وأصلها I .

ولتكن J من (C) بحيث $(\widehat{OI; OJ})$ زاوية قائمة موجبة المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C) .

لتكن J' من (C) بحيث $(\widehat{OI; OJ'})$ زاوية قائمة سالبة المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ'})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثية (C) .



2- النسب المثلثية

1-2 تعاريف

لتكن (C) دائرة مثلثية و $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفضولا منحنيها لها. نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

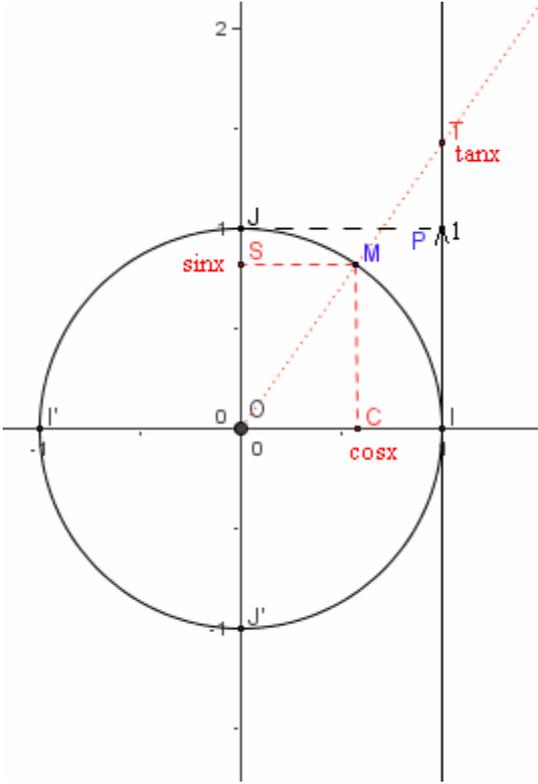
*- العدد الحقيقي أفضول النقطة M في المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $(O; \overline{OI}; \overline{OJ})$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$. لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$$k \in \mathbb{Z} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

العدد الحقيقي أفضول T في المعلم $(I; P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.



ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفضول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x; \sin x)$

تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها \mathbb{R} يرمز لها بـ \cos

- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \cos x$

تسمى دالة الجيب حيز تعريفها \mathbb{R} يرمز لها بـ \sin

- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \sin x$

تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$ يرمز لها بـ \tan

- الدالة $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \tan x$

2-2- خصائص

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفضولها منحنى x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$

و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I(1;0)$; $I'(-1;0)$

لكل $x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

*- لكل $x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

*- لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ، أفاصل منحنية لنفس النقطة M

لكل $x \in \mathbb{R} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad ; \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x$

- مهما كانت $M(x + k\pi)$ لدينا أفضول T هو $\tan x$

لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + k\pi) = \tan x$

حالة خاصة لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(x + \pi) = \tan x$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \triangleright \\ & \text{نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة } \cos \text{ زوجية و أن الدالة } \sin \text{ فردية.} \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \tan(-x) = -\tan x \quad \triangleright \end{aligned}$$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة \tan فردية.

$$\begin{aligned} & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi - x) = \sin x \quad ; \quad \cos(\pi - x) = -\cos x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\pi + x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(\pi + x) = -\cos x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \triangleright \\ & \text{لكل } x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad ; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad \triangleright \end{aligned}$$

3-2- نسب مثلثية اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين 1 أحسب $\cos \frac{34\pi}{3}$; $\cos \frac{-37\pi}{4}$; $\sin \frac{53\pi}{6}$; $\sin \frac{-7\pi}{2}$

تمرين 2 أ- حدد $1 + \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{2\pi}{6} + \dots + \cos \frac{11\pi}{6}$

ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) + \sin(3\pi + x) - \cos(7\pi - x)$

تمرين 1

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، نعتبر $\frac{267\pi}{6}$ و $-\frac{238\pi}{3}$ الأضلاع المنحنيين للنقطتين A و B . لتكن C نقطة حيث $[2\pi]$ $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$.

- 1- حدد الأضلاع المنحنيين الرئيسيين للنقطتين A و B
- 2- حدد القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ثم حدد $\cos(\widehat{OA; OB})$
- 3- حدد القياس الرئيسي $\widehat{(OC; OB)}$
- 4- مثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية

تمرين 2

1- أحسب $A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$

$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}$

2- علما أن $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ حدد $\cos \frac{\pi}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{8}$ و $\cos \frac{7\pi}{8}$

تمرين 3

1- بسط $C = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos\left(\frac{27\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(3\pi + x)$

2- بين أن $\cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$

الحل

تمرين 1

1- نحدد الأضلاع المنحنيين الرئيسيين للنقطتين A و B

لدينا $A\left(\frac{267\pi}{6}\right)$ و $\frac{267\pi}{6} = 2 \times 22\pi + \frac{\pi}{2}$ حيث $\frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$

إذن $\frac{\pi}{2}$ الأضلاع المنحني الرئيسي للنقطة A

لدينا $B\left(-\frac{238\pi}{3}\right)$ و $-\frac{238\pi}{3} = 2 \times -40\pi + \frac{2\pi}{3}$ حيث $\frac{2\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$

إذن $\frac{2\pi}{3}$ الأضلاع المنحني الرئيسي للنقطة B

2- نحدد القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ثم نحدد $\cos(\widehat{OA; OB})$

$\frac{\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$ و $\widehat{(OA; OB)} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

إذن $\frac{\pi}{6}$ القياس الرئيسي $\widehat{(OA; OB)}$ ومنه $\cos(\widehat{OA; OB}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3- نحدد القياس الرئيسي $\widehat{(OC; OB)}$

لدينا $[2\pi]$ $\widehat{(OA; OC)} \equiv \frac{-42\pi}{5}$

حسب علاقة شال لدينا

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \left(\widehat{OC;OA}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = -\left(\widehat{OA;OC}\right) + \left(\widehat{OA;OB}\right) + 2k\pi$$

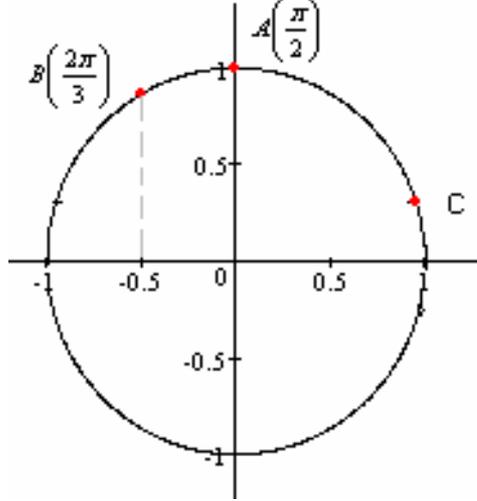
$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{42\pi}{5} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{257\pi}{30} + 2k\pi$$

$$\left(\widehat{OC;OB}\right) = \frac{17\pi}{30} + 8\pi + 2k\pi = \frac{17\pi}{30} + 2(4+k)\pi$$

وحيث $\frac{17\pi}{30} \in]-\pi; \pi]$ فان $\frac{17\pi}{30}$ هي القياس الرئيسي $\left(\widehat{OC;OB}\right)$

4- نمثل النقط A و B و C على الدائرة المثلثية



تمرين 2

1- نحسب A و B

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

$$\cos^2 \frac{7\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{7\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos \frac{\pi}{8}$$

$$\cos^2 \frac{5\pi}{8} = \cos^2 \frac{3\pi}{8} \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{5\pi}{8} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = -\cos \frac{3\pi}{8}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8}\right) \quad \text{و بالتالي}$$

$$A = 2\left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) = 2 \quad \text{ومنه} \quad \cos \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} \quad \text{لدينا}$$

ومنه

$$A + B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = 4 - A = 4 - 2 = 2 \quad \text{اذن} \quad A + B = 4 \quad \text{و بالتالي}$$

$$-2 \text{ نحدد } \cos \frac{7\pi}{8} \text{ و } \sin \frac{\pi}{8} \text{ و } \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\text{لدينا } 1 + \tan^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} \text{ نعلم أن } \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{ومنه } \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{8}} = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{2})} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{وحيث أن } \frac{\pi}{8} \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\text{ فإن } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ و } \sin \frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{و بالتالي } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ و } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{1 - \frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{7\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

تمرين 3

$$-1 \text{ نبسط } C = \sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) \cdot \cos(7\pi - x) + \cos \left(\frac{27\pi}{2} - x \right) \cdot \sin(3\pi + x)$$

$$\text{لدينا } \sin(3\pi + x) = \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\text{و } \cos \left(\frac{27\pi}{2} - x \right) = \cos \left(14\pi - \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin x$$

$$\text{و } \cos(7\pi - x) = \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{و } \sin \left(\frac{7\pi}{2} + x \right) = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{2} + x \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -\cos x$$

$$\text{إذن } C = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$-2 \text{ نبين أن } \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x = 1$$

$$\begin{aligned} \cos^6 x + \sin^6 x + 3\cos^2 x \sin^2 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 x \\ &= \cos^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\ &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1 \end{aligned}$$

تمارين غير محلولة التمرين 1

$$-1 \text{ حدد الأفصول المنحني الرئيسي المرتبط بالأفصول المنحنيين التاليين } \frac{-214\pi}{5} ; \frac{789\pi}{7}$$

$$-2 \text{ مثل على الدائرة المثلثية النقط ذات الأفصول المنحنية } \frac{-59\pi}{4} \text{ و } \frac{23\pi}{2} \text{ و } \frac{2\pi}{3} \text{ و } \frac{-\pi}{6}$$

$$-3 \text{ بين أن الأعداد التالية تمثل الأفصول المنحنية لنفس النقطة } \frac{25\pi}{6} ; \frac{-143\pi}{6} ; \frac{601\pi}{6}$$

$$-2 \text{ مثل على الدائرة المثلثية النقط } M_k \text{ التي أفصولها المنحنية هي } \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{4} \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$-4 \text{ ليكن } x \text{ الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة } M$$

$$\text{حدد الأفصول المنحنية لنقطة } M \text{ التي تنتمي الى المجال } I \text{ في الحالتين التاليتين}$$

$$(a) \quad x = \frac{\pi}{4} \quad I = \left[\frac{34\pi}{3}; \frac{43\pi}{3} \right] \quad (b) \quad x = \frac{-2\pi}{5} \quad I = \left[\frac{-33\pi}{5}; \frac{-13\pi}{5} \right]$$

5- ضع على دائرة مثلثية النقط M التي أفصولها المنحني x حيث $[2\pi]$ $3x \equiv \frac{\pi}{2}$

6- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات

$$-\frac{25\pi}{3} ; \frac{52\pi}{5} ; -36\pi ; 47\pi$$

التمرين 2

- أنشئ مثلثا ABC متساوي الساقين في الرأس A حيث $[2\pi]$ $(\widehat{AB;AC}) \equiv -\frac{2\pi}{5}$

- حدد بالدرديان قياس كل من الزوايا $(\widehat{BA;BC})$ و $(\widehat{BA;AC})$ و $(\widehat{CB;AC})$

التمرين 3

على الدائرة المثلثية نعتبر $A \left(\frac{-\pi}{3} \right)$. أعط القياس الرئيسي للزاوية $(\widehat{OA;OM})$ في كل من الحالتين

$$(a) \frac{27\pi}{2} \text{ أفصول منحني لنقطة } M \quad (b) \frac{23\pi}{8} \text{ } (\widehat{OJ;OM}) \equiv$$

التمرين 4

1- حدد النسب المثلثية للأعداد $\cos \frac{7\pi}{6}$; $\tan -\frac{73\pi}{3}$; $\sin \frac{15\pi}{4}$; $\sin \frac{-23\pi}{3}$

2- إذا علمت أن $\sin \frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ فأحسب $\cos \frac{7\pi}{8}$; $\tan \frac{7\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$

$$\cos \frac{327\pi}{8} ; \tan \frac{-78\pi}{8} ; \sin \frac{-25\pi}{8}$$

التمرين 5

ليكن $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$. نضع $A = \frac{\tan x - 1}{\tan^2 x + 1}$

1- بين أن $A = \cos x \sin x - \cos^2 x$

2- إذا علمت أن $\sin x = \frac{4}{5}$ فأحسب A

3- إذا علمت أن $A = 0$ فأحسب x

التمرين 6

1- إذا علمت أن $\sin \frac{7\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ أحسب $\cos \frac{7\pi}{8}$; $\tan \frac{7\pi}{8}$; $\sin \frac{\pi}{8}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$

2- بسط $A = \cos^6 x + \sin^6 x + 3 \cos^2 x \cdot \sin^2 x$ $B = (1 + \sin x + \cos x)^2 - 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$

$C = 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - 3(\cos^4 x + \sin^4 x)$ $D = \cos^6 x + \sin^6 x + \cos^4 x + \sin^4 x + 5 \cos^2 x \sin^2 x$

التمرين 7

1- أحسب $\tan \frac{\pi}{5} + \tan \frac{2\pi}{5} + \tan \frac{3\pi}{5} + \tan \frac{4\pi}{5}$

2- ليكن $x \in \mathbb{R}$

بسط $\sin(\pi - x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)$

$$\sin(x - 7\pi) + \sin(x + 9\pi)$$

$$\cos\left(x - \frac{27\pi}{2}\right) - \sin(x + 27\pi)$$

التمرين 8

ليكن $x \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right]$. نعتبر $A = \cos^4 x + \sin^4 x - (\sin x \cos x)(\cos x - \sin x)^2$

1- بين أن $A = 1 - \sin x \cdot \cos x$

$$-2 \text{ علما أن } \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ أحسب } A \text{ من أجل } x = \frac{11\pi}{12}$$

التمرين 9

نضع $x \in [0; \pi]$ حيث $P(x) = \cos^6 x + \sin^6 x - \frac{1}{4}$

$$-1 \text{ بين أن } P(x) = \frac{3}{4}(2\cos^2 x - 1)^2$$

-2 أكتب $P(x)$ بدلالة $\tan x$

-3 علما أن $\tan x = -\sqrt{2}$ أحسب $P(x)$ و $\cos x$.

التمرين 10

حدد

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} \quad B = 1 + \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{3\pi}{7} + \dots + \sin \frac{13\pi}{7}$$

التمرين 11

مثل على دائرة المثلثية النقط M التي أفصلها المنحنى α حيث $\cos \alpha = \frac{-3}{4}$ ، ثم لون بالأحمر جزء الدائرة

المثلثية الذي يحتوي على النقط التي أفصلها المنحنى β حيث $\cos \beta \leq -\frac{3}{4}$

التمرين 12

لون بالأحمر مجموعة النقط M التي أفصلها المنحنى θ حيث $\tan \theta \geq 2$

التمرين 13

على الدائرة المثلثية انشئ النقطتين M_1 و M_2 الذي أرتوبيهما $\frac{1}{2}$

-1 حدد مجموعة النقط M التي أفصلها المنحنى x حيث $\sin x > \frac{1}{2}$

-2 حدد مجموعة الأعداد x من $[-\pi; \pi]$ حيث $\sin x > \frac{1}{2}$

-3 حدد مجموعة الأعداد x من $[0; 2\pi[$ حيث $\sin x > \frac{1}{2}$

-4 حدد مجموعة الأعداد x من $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right[$ حيث $\sin x > \frac{1}{2}$