

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ: $f(x) = x|x| - 4x$

1 - أدرس زوجية الدالة f

2 - أ) بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4$$

ب) حدد رتبة f على كل من $[0; 2[$ و $]2; +\infty[$ واستنتج رتبة f على كل من $] -2; 0]$ و $] -\infty; -2[$

ج) اعط جدول تغيرات الدالة f

3- حدد مطايف الدالة f إن وجدت

4- حدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x$

$$f(x) = x|x| - 4x$$

1 - ندرس زوجية الدالة f

لدينا $D_f = \mathbb{R}$

لكل x من \mathbb{R} : $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x|-x| + 4x = -(x|x| - 4x) = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 4 \quad : [0; +\infty[\text{ من } x \text{ و } y \text{ مختلفين} \quad \text{أ) 2 - نبين أن لكل عنصرين مختلفين } x \text{ و } y \text{ من } [0; +\infty[$$

لدينا لكل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = x^2 - 4x$

ليكن x و y من $[0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} &= \frac{x^2 - 4x - y^2 + 4y}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y) - 4(x - y)}{x - y} \\ &= \frac{(x - y)(x + y - 4)}{x - y} \\ &= x + y - 4 \end{aligned}$$

ب) نحدد رتبة f على كل من $[0; 2[$ و $]2; +\infty[$ ونستنتج رتبة f على كل من $] -2; 0]$ و $] -\infty; -2[$

* ليكن x و y من $[0; 2[$ حيث $x \neq y$ ومنه $0 \leq x < 2$ و $0 \leq y < 2$

و بالتالي $0 \leq x + y < 4$ أي $-4 \leq x + y - 4 < 0$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \text{ ومنه}$$

إذن f تناقصية قطعاً على $[0; 2[$ و حيث أن f فردية فإن f تناقصية قطعاً على $] -2; 0]$

* ليكن x و y من $]2; +\infty[$ حيث $x \neq y$ ومنه $x > 2$ و $y > 2$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \text{ وبالتالي } x + y - 4 > 0 \text{ أي}$$

إذن f تزايدية قطعا على $]-\infty; -2[$ ومنه f تزايدية قطعا على $]2; +\infty[$ (ج) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
f		↗ 4	↘ -4	↗

3- نحدد مطايرف الدالة f

بما أن f تزايدية على كل من $]-\infty; -2[$ و $]2; +\infty[$ و تناقصية على $]-2; 2[$ فإن f تقبل قيمة قصى عند -2 هي 4 و قيمة دنيا عند 2 هي -4

4- نحدد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -2x$

تحديد تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يرجع إلى حل المعادلة $x|x| - 4x = -2x$

$$x|x| - 2x = 0 \text{ تكافئ } x|x| - 4x = -2x$$

$$\text{تكافئ } x(|x| - 2) = 0$$

$$\text{تكافئ } x = 0 \text{ أو } |x| = 2$$

$$\text{تكافئ } x = 0 \text{ أو } x = 2 \text{ أو } x = -2$$

إذن المنحنى (C_f) و المستقيم (D) يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 2 و -2

تمرين 2

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات f على $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ و استنتج منحنى تغيراتها على $]-1; 0[$ و $]-\infty; -1[$

4- أعط جدول تغيرات f

الحل

$$f(x) = \frac{-x}{x^2 - 1}$$

1- نحدد D_f

*- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x \in D_f \text{ يكافئ } x^2 - 1 \neq 0$$

$$\text{تكافئ } x^2 \neq 1$$

$$\text{تكافئ } x \neq 1 \text{ و } x \neq -1$$

$$\text{إذن } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

*- نبين أن f دالة فردية

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} : -x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{لتكن } x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$f(-x) = \frac{-(-x)}{(-x)^2 - 1} = -\frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$$

إذن f دالة فردية

$$-1 \quad \text{نبين أن لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } D_f \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

ليكن a و b من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ حيث $a \neq b$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{\frac{-a}{a^2 - 1} - \frac{-b}{b^2 - 1}}{a - b} = \frac{-a(b^2 - 1) + b(a^2 - 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} \times \frac{1}{a - b}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{-ab^2 + a + ba^2 - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab(a - b) + a - b}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)}$$

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{(a - b)(ab + 1)}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)(a - b)} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

-2 نحدد منحنى تغيرات f على $[0; 1[$ و $]1; +\infty[$ و نستنتج منحنى تغيراتها على $] -\infty; -1[$ و $] -1; 0[$

$$\text{لدينا لكل عنصرين مختلفين } a \text{ و } b \text{ من } \mathbb{R} - \{-1; 1\} \quad \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}$$

ليكن a و b من $[0; 1[$

ومنه $0 \leq a < 1$; $0 \leq b < 1$ وبالتالي $0 \leq a^2 < 1$ et $0 \leq b^2 < 1$ et $0 \leq ab < 1$

ومنه $1 \leq ab + 1 < 2$ et $-1 \leq a^2 - 1 < 0$ et $-1 \leq b^2 - 1 < 0$

إذن $\frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0$ ومنه f تزايدية على $[0; 1[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $] -1; 0[$

ليكن a و b من $]1; +\infty[$

ومنه $a > 1$; $b > 1$ وبالتالي $a^2 > 1$ et $b^2 > 1$ et $ab > 1$

ومنه $ab + 1 > 2$ et $a^2 - 1 > 0$ et $b^2 - 1 > 0$

إذن $\frac{ab + 1}{(a^2 - 1)(b^2 - 1)} > 0$ ومنه f تزايدية على $]1; +\infty[$

و حيث أن f فردية فان f تزايدية على $] -\infty; -1[$

-3 جدول تغيرات f

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↗			↗	

تمارين

تمرين 1

حدد مجموعة تعريف الدالة f في الحالات التالية

$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{2x+1}{x^2+3} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2-2x} \quad (c)$$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} & x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1}{x+1} & x < -1 \end{cases} \quad (e)$$

تمرين 2

مثل مبيانيا الدوال f و g و h حيث

$$\begin{cases} h(x) = -2 & x \geq 1 \\ h(x) = -x - 1 & x < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = |2x+1| \quad ; \quad f(x) = -3x+6$$

تمرين 3

أدرس زوجية الدالة f في الحالات التالية

$$f(x) = \frac{x^3}{|x|-1} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2+3} \quad (a)$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (d) \quad ; \quad f(x) = x^2 - 2x \quad (c)$$

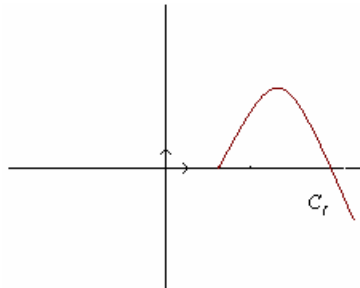
$$f(x) = |x+2| - |x-2| \quad (e)$$

$$\begin{cases} f(x) = 2x+1 & x \geq 0 \\ f(x) = -2x+1 & x < 0 \end{cases} \quad (g)$$

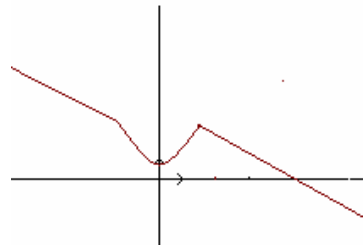
تمرين 4

1- أتمم المنحنى C_f في الحالتين

أ- دالة زوجية
ب- دالة فردية



2- دالة عددية منحناها كما يله



هل f زوجية

تمرين 5

$$f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x|}$$

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ

1- حدد D_f و بين أن f دالة زوجية

2- أنشئ المنحنى C_f في مستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

تمرين 6

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1- أدرس رتبة f على كل من $]2; +\infty[$ و $]-\infty; 2]$ و أعط جدول تغيراتها

2- حدد تقاطع C_f و محور الأفاصيل

3- حدد تقاطع C_f و المستقيم ذا المعادلة $y = x + 1$

تمرين 7

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

أدرس تغيرات f

تمرين 8

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{-1}{x^2+1}$

1- أدرس زوجية f

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من \mathbb{R}

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات f على $]0; +\infty[$ و استنتج منحنى تغيراتها على $]-\infty; 0]$

4- أعط جدول تغيرات f و حدد قيمة قصوى للدالة f

تمرين 9

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = x^3 - 3x$

1- أدرس زوجية f

2- أدرس منحنى تغيرات f على $]0; 1[$ و على $]1; +\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R}

3- استنتج مطاريف الدالة f

تمرين 10

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$

1- حدد D_f و أدرس زوجية f

2- أدرس رتبة f على كل من $]0; 2[$ و $]2; +\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على D_f

3- استنتج مطاريف الدالة f إن وجدت

تمرين 11

نعتبر $f(x) = \frac{2x-1}{x^2}$

1- حدد D_f ، حل المعادلة $f(x) = 1$

2- بين أن لكل x من \mathbb{R}_+^* $f(x) \leq 1$ استنتج مطاريف f

تمرين 12

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{-x}{x^2-1}$

1- حدد D_f و بين أن f دالة فردية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين a و b من D_f

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{ab+1}{(a^2-1)(b^2-1)}$$

3- حدد منحنى تغيرات f على $[0;1[$ و $]1;+\infty[$ و استنتج منحنى تغيراتها على $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

4- أعط جدول تغيرات f

تمرين 13

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{x^2}{|x|-1}$

1- D_f و بين أن f دالة زوجية

2- بين أن لكل عنصرين مختلفين x و y من $\mathbb{R}^+ - \{1\}$

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{(x-1)(y-1)-1}{(x-1)(y-1)}$$

3- حدد رتبة f على $[0;1[$ و $]1;2[$ و $]2;+\infty[$

4- أعط جدول تغيرات f على D_f

استنتج مطاريف f إن وجدت

تمرين 14

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{x^2+2}{x}$

1- بين أن f فردية

2- أثبت لكل x و y من \mathbb{R}^* حيث $x \neq y$ لدينا

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{xy-2}{xy}$$

3- أ- أدرس رتبة f على كل من $]0;\sqrt{2}[$; $[\sqrt{2};+\infty[$

ب- أعط جدول تغيرات على \mathbb{R}^*

د- استنتج مطاريف الدالة f إن وجدت.

تمرين 15

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x-2} & x < 0 \end{cases}$$

1- أحسب $f(2)$; $f\left(\frac{-1}{2}\right)$; $f\left(\frac{-3}{2}\right)$

2- أدرس رتبة على كل من $]0;2[$ و $]2;+\infty[$ و $]0;+\infty[$

3- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- استنتج مطاريف f إن وجدت