

## المتاليات العددية

### تمرين 1

لتكن  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  متالتين عدديتين معرفتين

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u = 1 \\ u = \frac{u+2v}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} v = 12 \\ v = \frac{u+3v}{4} \end{cases} \quad \text{بما يلي}$$

1- نضع  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad w_n = v_n - u_n$

أ- بين أن  $(w_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية وأحسب  $w_n$  بدلالة  $n$

ب- حدد  $\lim w_n$

2- أ- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية تزايدية و أن  $(v_n)_{n \geq 1}$

متتالية تناقصية

ب- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < v_n$

ج- استنتج أن  $(v_n)_{n \geq 1}$  و  $(w_n)_{n \geq 1}$  متقاربتين

### تمرين 2

$$\begin{cases} u_0 = -1 ; u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

1- أحسب  $u_2$  ;  $u_3$

2- نعتبر المتالتين  $(a_n)$  و  $(b_n)$  حيث

$$a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n ; b_n = 2^n u_n$$

أ- بين أن  $(a_n)$  متتالية هندسية وأحسب  $a_n$  بدلالة  $n$

ب- بين أن  $(b_n)$  متتالية حسابية وأحسب  $b_n$  بدلالة  $n$

ج- استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$

$$3- \text{ أ- بين بالترجع } \forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$$

ب- حدد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$  ثم  $\lim u_n$

### تمرين 3

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ب:

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1}$$

(1) - بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 1$

(2) أدرس رتبة  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

(3) استنتج أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة

أ- بين أن لكل  $n \in \mathbb{N} : 0 < u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

ب- استنتج :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

ثم أحسب  $\lim u_n$

### تمرين 4

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة ب :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{2}{u_n} \right)$$

(1) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sqrt{2} < u_n \leq \frac{3}{2}$

(2) بين أن  $(u_n)$  تناقصية قطعاً و استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة  
3) أ. بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ب. استنتج :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$

ت. استنتج :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - \sqrt{2})$

ث. استنتج  $\lim u_n$

### تمرين 5

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة ب:  $f(x) = x^2 + \frac{3}{4}x$

(1) ضع جدول تغيرات  $f$ .

(2) نعتبر المجال  $I = \left[0; \frac{1}{4}\right]$  بين أن  $f(I) = I$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة ب:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n \text{ و } u_0 = \frac{1}{5}$$

أ. بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$

ب. ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

ت. بين أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة

حدد نهاية المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

### تمرين 6

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n < 2$

2- بين أن  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية تزايدية و استنتج أن  $(u_n)_{n \geq 1}$

متتالية متقاربة .

3- استنتج  $\lim u_n$

### تمرين 7

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n(u_n + 1) \end{cases}$$

1- أحسب  $u_1$  ;  $u_2$  .

2- بين أن  $(u_n)$  متتالية تزايدية.

3- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > 2u_n$  و استنتج

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 3 \times 2^n$$

4- أحسب  $\lim u_n$

### تمرين 8

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة ب

$$u_0 = -\frac{5}{4} \quad u_{n+1} = (u_n + 2)^2 - 2$$

1- بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad -2 < u_n < -1$

2- بين أن  $(u_n)$  متتالية تناقصية و استنتج أن  $(u_n)$

متقاربة .

4- أحسب  $\lim u_n$

### تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

1- بين بالترجع أن  $0 < u_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2- تأكد أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$  ثم  $\forall n \in \mathbb{N}$

استنتج أن  $(u_n)$  متتالية تزايدية.

3- أ- تأكد أن  $\frac{1}{2 + \sqrt{u_n + 2}} < \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  ثم بين أن

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 - u_{n+1} < \frac{2 - u_n}{2}$$

ب- بين أن  $0 < 2 - u_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$  ثم

استنتج  $\lim u_n$

### تمرين 10

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بـ:  $u_1 = 1$  ولكل

$$u_{n+1} = 2u_n + \frac{n+2}{n(n+1)} \quad : n \in \mathbb{N}^*$$

1) - أحسب  $u_2$  و  $u_3$

2- نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بـ:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

أ- بين أن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  هندسية محددًا أساسها وحدها الأول

ب- - أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$

ج- هل  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  متقاربة

### تمرين 11

I - نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^*$

$$f(x) = 3 - \frac{9}{4x}$$

1) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

2) نضع  $I = \left] \frac{3}{2}, 3 \right]$ .

أ- بين أن  $f(I) \subset I$ .

ب- بين أن  $(\forall x \in I) f(x) < x$ .

II - لتكن  $(u_n)$  المتتالية المعرفة بما

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \end{cases}$$

1) أ رسم التمثيل المبياني للدالة  $f$  و المستقيم ذي

المعادلة  $y = x$ . مثل على محور الأفاصل الحدود الثلاثة

الأولى للمتتالية  $(u_n)$ .

2) بين بالترجع أن  $\frac{3}{2} < u_n \leq 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ .

3) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية. استنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها.

4) نضع  $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ .

أ- بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية محددًا أساسها و حدها الأول.

ب- أحسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج- أحسب من جديد  $\lim u_n$ .

### تمرين 12 (بعد درس الدوال اللوغاريتم و الاسية)

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt[3]{u_n - 1} \end{cases}$$

1. بين بالترجع أن  $1 < u_n < 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ .

2.

أ- بين أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt[3]{u_n - 1} (1 - \sqrt[3]{u_n - 1}) (1 + \sqrt[3]{u_n - 1})$$

ii. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية.

iii. بين أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ثم حدد نهايتها.

3. نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \ln(u_n - 1)$$

أ. تحقق أن  $v_0 = -\frac{1}{3}$  ثم بين أن  $(v_n)$  متتالية

هندسية محددًا أساسها  $\frac{1}{3}$ .

ii. استنتج أن  $\ln(u_n - 1) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$   $(\forall n \in \mathbb{N})$ .

iii. احسب  $u_n$  بدلالة  $n$ .