

التمرين 1 : (3.25 نقطة)

يحتوي صندوق على 10 كرات سوداء و 10 كرات بيضاء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق، إذا كانت سوداء نعيدها إلى الصندوق وإذا كانت بيضاء نعوضها بكرتين سوداوين من خارج
الصندوق

ثم نسحب عشوائيا مرة ثانية كرة واحدة من الصندوق .

(1) حدد احتمال الأحداث التالية :

أ- الحصول على كرتين بيضاوين . (0.75 ن)

ب - الحصول على كرتين سوداوين . (0.75 ن)

ج - الحصول على كرتين مختلفتي اللون . (0.75 ن)

(2) حدد احتمال أن تكون الكرة الأولى المسحوبة بيضاء علما أن الكرة الثانية المسحوبة سوداء . (1 ن)

التمرين 2 : (3.75 نقطة)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 2 , u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

(1) حل المعادلة المميزة ثم استنتج أن $u_n = 2^n + 3^n$ لكل n من \mathbb{N} . (0.5)

(2) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. (0.5)

(3) أ - ادرس بواقى القسمة الأقليدية للأعداد 2^n و 3^n على 5 . (0.5)

ب - استنتج حلول المعادلة $u_n \equiv 0 [5]$ ، $n \in \mathbb{N}$. (0.5)

(4) بين أن u_n و u_{n+1} أوليان فيما بينهما لكل n من \mathbb{N} . (0.5)

(5) أ - تحقق من أن u_m لا يكتب على الشكل b^α (حيث b و α عدنان صحيحان طبيعيان ، $\alpha \geq 2$) في الحالتين التاليتين

• $m = 1$ (0.25 ن)

• $m = 3$ (0.25 ن)

(6) نفترض أن m عدد صحيح طبيعي فردي وأولي مع 5 .

أ - بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث $u_m = 5S_k$ حيث

$$S_k = 2^{2k} + 2^{2k-1}(-3) + 2^{2k-2}(-3)^2 + \dots + 2(-3)^{2k-1} + (-3)^{2k}$$

ب - بين أن $S_k \equiv m2^{m-1} [5]$. (0.25 ن)

ج - استنتج أن S_k لا يقبل القسمة على 5 . (0.25 ن)

التمرين 3 : (5 نقط)

لكل عدد عقدي z نضع $P(z) = 2iz^3 + 2(2-i)z^2 - (3+2i)z + i$.

(1) أ - أوجد العدد الحقيقي b بحيث $P(bi) = 0$. (0.5 ن)

ب - تحقق أن $P(z) = (z-bi)Q(z)$ حيث $Q(z) = ((1+i)z-i)^2$. (0.5 ن)

(2) نعتبر المعادلة : $z^2 - (m-i(m+1))z - im^2 - m = 0$ ، $z \in \mathbb{C}$ ، (E) حيث m بارمتر عقدي .

أ - بين أن مميز المعادلة (E) هو $Q(m)$. (0.5 ن)

ب - حدد الجذرين z' و z'' للمعادلة (E) علما أن $|z'| = |m|$. (0.5 ن)

(3) نضع $m = 2 \cos \theta + i \sin \theta$ حيث $\theta \in [0, \pi]$ ونعتبر المجموعة $(C) = \{M(z'') \mid \theta \in [0, \pi]\}$

أ - بين أن جزء (C) من إهليلج ينبغي تحديده معادلته ورؤوسه في معلم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (0.75 ن)

ب - أنشئ (C) في المعلم (O, \bar{i}, \bar{j}) . (0.5 ن)

(4) نضع $m = \frac{2}{\cos \theta} + 3i \tan \theta$ حيث $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ ونعتبر المجموعة $(C') = \left\{ M(\bar{z}) \mid \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\right\}$.

أ - بين أن (C') جزء من هذلول (H) ينبغي تحديد معادلته ورأسه ومقاربيه في المعلم (O, \bar{i}, \bar{j}) . (1 ن)

ب - أنشئ (H) و (C') في المعلم (O, \bar{i}, \bar{j}) . (0.75 ن)

التمرين 5 : (5 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{x^2} - 1}{x}, & x < 0 \\ f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و (C_f) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم (O, \bar{i}, \bar{j}) .

(I) 1) أ - بين أن f متصلة على اليسار عند النقطة 0. (0.25 ن)

ب - ادرس اتصال f على اليمين عند النقطة 0. (0.25 ن)

(2) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار عند النقطة 0. (0.25 ن)

(II) 1) أ - أثبت أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) (2x^2 - 1)e^{x^2} + 1 > 0$. (0.75 ن)

ب - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]-\infty, 0]$. (0.75 ن)

(2) أ - بين أن $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$. (0.5 ن)

ب - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$. (1 ن)

(3) أ - اعط جدول تغيرات الدالة f . (0.5 ن)

ب - أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) . (0.75 ن)

ج - أنشئ المنحنى (C_f) . (0.5 ن)

(4) ليكن λ عددا حقيقيا من المجال $]1, +\infty[$.

أ - أحسب بدلالة λ المساحة $A(\lambda)$ للجزء من المستوى المكسور بين المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين

بالمعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$. (1 ن)

ب - أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. (0.25 ن)

التمرين 3 : (3 نقط)

نعتبر المجموعة التالية $E = \left\{ M_{(n)} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^n & 2^n \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

$f: \mathbb{Z} \rightarrow E$

$n \mapsto M_{(n)}$

(1) نعتبر التطبيق f المعروف بما يلي :

أ - بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, +)$ نحو (E, \times) . (0.5 ن)

ب - استنتج بنية (E, \times) . (0.5 ن)

(2) حدد بدلالة n و p المصفوفة $(M_{(n)})^p$ حيث $p \in \mathbb{Z}$. (0.5 ن)

(3) ليكن (a, b) من \mathbb{Z}^2 نعتبر المجموعة التالية $F = \{ M_{(a)}^p \times M_{(b)}^q \mid (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \}$

أ - بين أن (F, \times) زمرة جزئية من (F, \times) . (0.5 ن)

ب - ليكن c من \mathbb{Z} بين أن $c : a \wedge b \mid c \Leftrightarrow M_{(c)} \in F$. (0.5 ن)

ج - استنتج أن : $E = F \Leftrightarrow a \wedge b = 1$. (0.5 ن)

أمازيغ