

أكاديمية مكناس تافيلالت نيابة مكناس مؤسسة إميل	الإمتحان التجريبي لمادة الرياضيات دورة أبريل 2007	الصفحة : 3/1 مدة الإنجاز : 4 ساعات الشعبة : العلوم الرياضية أوب المستوى: 2 سلك باكالوريا المعامل: 10
--	--	--

« Code : Bmaj07 »

يتكون الموضوع من أسئلة مستقلة تتعلق بالمكتسبات والمفاهيم التي تم التطرق إليها في الدروس وثلاثة تمارين و مسألة

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير المبرمجة
يأخذ بعين الاعتبار الوضوح والدقة في التحرير والتنظيم
كل صفحة للموضوع تحرر على أوراق مزدوجة مستقلة

أسئلة مستقلة : (نقطتان)

1 [ن 1] بين أن كل عدد عقدي غير منعدم له جذران متقابلان .
(يمكنك استعمال الشكل الجبري أو الشكل المثلثي)

0.50 [ن 2] بين أن كل عنصر من زمرة (E, \otimes) هو عنصر منتظم وأن مماثل $x \otimes y$ يحقق:
 $\forall (x, y) \in E^2 : (x \otimes y)^{-1} = y^{-1} \otimes x^{-1}$ بحيث x^{-1} هو مماثل العنصر x .

0.50 [ن 3] صغ مبرهنة التزايديات المنتهية ثم بين أن : $\forall x \in]0, +\infty[: \ln(x) \leq x - 1$

التمرين الأول : (3.50 نقط)

الهدف من هذا التمرين هو الإجابة عن السؤال التالي: هل توجد مالا نهاية من الأعداد الأولية التي تكتب على الشكل $6k + 5$ ؟

0.75 [ن 1] ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$ بين أن $p \equiv 1[6]$ ou $p \equiv 5[6]$.

0.75 [ن 2] أعط ثلاثة أمثلة لأعداد أولية تكتب على شكل $6k + 5$. هل كل عدد أولي أكبر

قطعا من 3 يمكن كتابته على الشكل $6k + 5$ ؟.

نفترض أن مجموعة الأعداد الأولية التي تكتب على شكل $6k + 5$ منتهية وليكن n هو عدد عناصرها التي نرسم لها ب : $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ بحيث تكون $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_n$ (لاحظ أن

p_1 هو أصغر عنصر بحيث $p_1 \equiv 5[6]$). نضع $N = 6 \left(\frac{p_1 p_2 p_3 \dots p_n}{5} \right) + 5$.

0.75 [ن 3] كم يساوي p_1 ؟ تحقق من أن $N \equiv 5[6]$; $N \in \mathbb{N}$

0.50 [ن 4] بين أن كل قاسم أولي للعدد N يخالف الأعداد p_i بحيث $i \in [1, n]$

0.75 [ن 5] بين أن أحد القواسم الأولية للعدد N يكتب على شكل $6k + 5$ (استعمل الخلف)

ثم استنتج الإجابة عن السؤال المطروح .

التمرين الثاني: (نقطتان ونصف)

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v})

(1) لتكن M نقطة من المستوى (P) ولحقها العدد العقدي Z .

(أ) [0.50ن] بين أن مجموعة النقط M بحيث $\bar{Z} + Z + 4 = 0$ هي مستقيم (D) ثم أنشئه

(ب) [0.75ن] بين أن: $\forall M \in (P) : d(M, (D)) = \frac{1}{2} |Z + \bar{Z} + 4|$

(2) نعتبر النقطة $F(1+i)$ ونرمز ل (P') مجموعة النقط (P) الغير المنتمية ل (D) ولتكن المجموعة E المعرفة ب :

$$E = \left\{ M(Z) \in (P'), \left| \frac{Z-1-i}{Z+\bar{Z}+4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

(أ) [0.75ن] بين أن E مخروطي . ماهي طبيعته ؟

(ب) [0.50ن] أنشئ E وتحقق من أن النقطة O تنتمي إلى E .

التمرين الثالث : (3.5 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة . ونضع: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 3b & a-2b \end{pmatrix}$

ولتكن E المجموعة المعرفة بما يلي :

$$E = \{M(a,b) \in M_2(\mathbb{R}) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

(1) [0.50ن] بين أن $(E, +)$ زمرة تبادلية

(2) بين أن :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : M(a,b) \times M(c,d) = M(ac - 3bd, ad + bc - 2bd). \quad [0.75ن]$$

(3) نعتبر التطبيق $\varphi : E^* \rightarrow C^*$

$$\text{بحيث } \varphi(M(a;b)) = (a-b) + ib\sqrt{2} \text{ و } E^* = E - \{M(0,0)\}$$

(أ) [0.75ن] بين أن φ تطبيق تقابلي وحدد تقابله العكسي φ^{-1}

(ب) [0.75ن] نقبل أن E^* جزء مستقر من (E, \times) . بين أن φ تشاكل من (E^*, \times) نحو (C^*, \times)

(4) [0.75ن] بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي

المسألة : (8.50 نقطة)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{2(xe^x + 1)}$

الجزء الأول: (3.50 نقطة)

(1)

(أ) 0.50 بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}; x + e^{-x} \geq 1$ ثم استنتج D مجموعة تعريف الدالة f .

(ب) 0.50 احسب نهايتها f عند محدي D .

(2)

(أ) 0.75 احسب $f'(x)$ لكل x من D ثم اعط جدول تغيرات f .

(ب) 0.50 أثبت أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,1[$.

(ج) 0.75 بين أن : $e^x(4x^2e^x + 5x - 3) + 4 > 0; \forall x \geq 0$ واستنتج أن : $\forall x \geq 0; |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

(د) 0.50 ارسم (C) في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . نأخذ $\|\vec{i}\| = 2cm$

الجزء الثاني: (نقطتان)

(1) نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(أ) 0.75 بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 \leq u_n \leq 1$

(ب) 0.50 أثبت أن $\forall n \in \mathbb{N}; u_n \neq \alpha$.

(ج) 0.25 بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ليست رتيبة.

(د) 0.50 باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

و استنتج $\lim(u_n)$.

الجزء الثالث: (3 نقط)

لتكن F الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$

(1)

(أ) 0.75 تحقق أن F معرفة على \mathbb{R} . و بين أن $\forall t \in \mathbb{R}; 0 < f(t) \leq \frac{1}{2}e^{-t}$.

(ب) 0.50 استنتج أن : $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2}xe^{-x}; \forall x \in]0, +\infty[$ واحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

(2)

(أ) 0.50 بين أن $F(x) \leq \frac{1}{2}x; \forall x \in]-\infty, -1[$ واحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$.

(ب) 0.25 بين أن $-\frac{te^t}{2(1+te^t)} < -te^t < 0; \forall t \in]-\infty, -1[$.

(ج) 0.50 استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} (F(x) - \frac{1}{2}x)$ وأول النتيجة هندسيا.

(د) 0.50 بين ان F قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} واحسب $F'(x)$.