ثانوية الحسن الثاني التأهيلية
نيابة الرشيدية
الريصاني

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم

عناصر الإجابة للامتحان الوطني الموحد للباكالوريا
الدورة العادية 2009.

المادة :	الرياضيات
الشعب و المسالك:	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها و شعبة العلوم و التكنولوجيات بمسلكيها.

التمرين الأول

1- لدينا $\overrightarrow{OC}(2,-1,0)$ و $\overrightarrow{OD}(0,1,-1)$ و بالتالي:

$$\boxed{\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}(1,2,2)}$$

ونعلم أن المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ منظمية على المستوى (OCD) و بالتالي :

$(OCD): x+2y+2z+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$.

و بما أن $O\in(OCD)$ فإن $d=0$ و منه:

$$\boxed{(OCD): x+2y+2z=0}$$

2- لدينا: $(S)=\{M\in(\mathcal{E})/\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\}$ و منه فإن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و بالتالي فإن مركزها Ω هو منتصف $[AB]$ و شعاعها هو $R=\frac{AB}{2}$ و بالتالي: $\Omega(2,4,4)\Leftrightarrow\Omega\left(\frac{-2+6}{2},\frac{2+6}{2},\frac{8+0}{2}\right)\Leftrightarrow\Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ و

و $R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}{2}=\frac{\sqrt{144}}{2}=6$

3-

أ – لدينا :

$$d(\Omega,(OCD))=\frac{|x_\Omega+2y_\Omega+2z_\Omega|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|2+2.4+2.4|}{\sqrt{9}}=\frac{18}{3}=6$$

و منه : $\boxed{d(\Omega,(OCD))=6}$

ب – لدينا حسب السؤال السابق : $d(\Omega,(OCD))=R$ و بالتالي فإن المستوى (OCD) مماس للفلكة (S)

ج- لدينا $\overrightarrow{OA}(-2,2,8)$ و $\overrightarrow{OB}(6,6,0)$ و بالتالي : $\boxed{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=-12+12=0}$

مما سبق $O\in(S)$ و بما أن $O\in(OCD)$ و (OCD) مماس للفلكة (S) فإن O هي نقطة تماس (S) و (OCD).

التمرين الثاني

1- لدينا : $|a|=|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$ ومنه:

$$a=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4})-\sin(\frac{\pi}{4}))=2\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+\sin(-\frac{\pi}{4}))$$

أي أن : $\boxed{a==\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]}$

و لدينا :

$$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}=-\cos(\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{6})=\cos(\pi-\frac{\pi}{6})+i\sin(\pi-\frac{\pi}{6})$$

و منه : $\boxed{b=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]}$

2- لدينا : $R = r\left(O, \frac{\pi}{6}\right)$

أ- الطريقة الأولى:

لدينا الكتابة العقدية لهذا الدوران هي : $z' - z_O = e^{i\frac{5\pi}{6}}(z - z_O)$ و حسب السؤال السابق $b = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و منه $z' = b.z$

الطريقة الثانية:

إذا كانت $M = O$ فإن $r(M) = O$ و العلاقة $z' = b.z$ صحيحة لأجل $z = z' = 0$.

لكل M من المستوى العقدي لدينا:

$$r(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg\frac{z'}{z} \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'}{z} = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right]$$

و بالتالي حسب الكتابة المثلثية ل b فإن $z' = b.z$ لكل $M(z)$ و $M'(z')$ بحيث $r(M) = M'$.

ب- لدينا :

$$\begin{aligned} b.a &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)(2-2i) \\ &= -\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3}i + i \\ &= (1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}+1) = c \end{aligned}$$

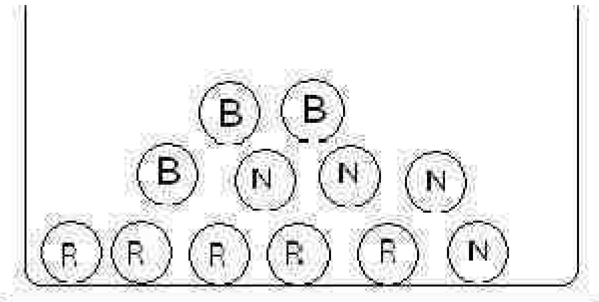
و منه فحسب 1- $\boxed{R(A) = C}$

3- حسب 2- ب $c = b.a$ و بالتالي : $\arg(c) \equiv \arg(a.b)[2\pi] \equiv \arg(a) + \arg(b)[2\pi]$

و حسب 1- $\arg(c) \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}[2\pi] \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]$

و بالتالي : $\boxed{\arg(c) \equiv \frac{7\pi}{12}[2\pi]}$

التمرين الثالث:



1- التجربة في هذا التمرين عشوائية و الاحتمال منتظم و بالتالي فإن : $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من الصندوق و بالتالي فإن $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$

و منه: $p(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3 + C_5^3}{220} = \frac{1+4+10}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$.

و أيضا: $p(B) = \frac{C_3^1.C_4^1.C_5^1}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$.

2-

أ- لدينا : $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ (إما أن الكرات المسحوبة كلها نفس اللون : $X = 1$ أو أنها من لونين مختلفين $X = 2$ أو أن ألوانها مختلفة مثنى مثنى $X = 3$).

ب- حسب 1- لدينا $p(A) = p(X = 1) = \frac{3}{44}$ و $p(B) = p(X = 3) = \frac{3}{11} = \frac{12}{44}$ و منه

$p(X = 2) = 1 - (p(A) + p(B)) = \frac{29}{44}$

(يمكن إستعمال ما يلي : $p(X = 2) = \frac{C_3^2.C_9^1 + C_4^2.C_8^1 + C_7^1.C_5^2}{220} = \frac{27 + 48 + 70}{220} = \frac{29}{44}$)

و بالتالي :

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{12}{44}$

الأمل الرياضي : $\boxed{E(X)=1.\frac{3}{44}+2.\frac{29}{44}+3.\frac{12}{44}=\frac{97}{44}}$

التمرين الرابع:

1- أ- لدينا : $(\forall x\neq -3):\ 1-\frac{3}{x+3}=\frac{x+3-3}{x+3}=\frac{x}{x+3}$

ب-

$$\begin{aligned} I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx &=\int_{-2}^{-1}(1-\frac{3}{x+3})dx\\ &=[x]_{-2}^{-1}-3\int_{-2}^{-1}\frac{(x+3)'}{x+3}dx\\ &=-1+2-3[\ln(|x+3|)]_{-2}^{-1}\\ &=1-3(\ln|2|-\ln|1|)=1-3\ln 2\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{I=1-3\ln 2}$.

-2

$$\begin{aligned} J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)dx &=[x\ln(2x+6)]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}x\frac{2}{2x+6}dx\\ &=-\ln 4+2\ln 2-\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx\\ &=0-I=-I\end{aligned}$$

وبالتالي : $\boxed{J=-I}$.

مسألة:

الجزء الأول:

1- لدينا : $(\forall x\in\mathbb{R}):(\sqrt{e^x}-1)^2+1=e^x-2\sqrt{e^x}+1+1=e^x-2\sqrt{e^x}+2$.

نعلم أن $(\forall x\in\mathbb{R}):(\sqrt{e^x}-1)\geq 0$ و بالتالي من العلاقة السابقة $(\forall x\in\mathbb{R}):e^x-2\sqrt{e^x}+2>0$ و منه: $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}}$

وبما أن $(\forall x\in\mathbb{R}):e^x>0$ فإن : $(\forall x\in\mathbb{R}):\frac{e^x-2\sqrt{e^x}+2}{e^x}>0$ أي $\boxed{(\forall x\in\mathbb{R}):1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}>0}$

2- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln((\sqrt{e^x}-1)^2+1)$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{e^x}-1)^2+1=+\infty$ فإن : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$

و لدينا كذلك : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2)$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-2\sqrt{e^x}+2=0-0+2$

فإن $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2\ln 2=\ln 4}$ و هذا يعني أن المستقيم $y=\ln 4$: (Δ) مقارب أفقي ل $(\mathcal{C}_f)$ منحنى الدالة f بجوار $-\infty$.

3- أ- لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\begin{aligned}(\forall x\in\mathbb{R}):\ f'(x)&=2\frac{((\sqrt{e^x}-1)^2+1)'}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}\\ &=2\frac{2(\sqrt{e^x}-1)\sqrt{e^x}'}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}\\ &=2\frac{2(\sqrt{e^x}-1)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}\\ &=\frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}\end{aligned}$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = \dfrac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x}-1)}{(\sqrt{e^x}-1)^2+1}}$

و منه $0 = f'(0) = \dfrac{2\sqrt{e^0}(\sqrt{e^0}-1)}{(\sqrt{e^0}-1)^2+1} = \dfrac{2.1.0}{1} = 0$.

ـ لدينا : $\sqrt{e^x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}=1 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ و بالتالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$		0	$+$

و بما أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x}-1$ فإن لدينا جدول تغيرات الدالة f كما يلي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4- أ- لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x}+2) = \ln(e^x.(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}))$

و حسب 1- من الجزء الأول فإن $(\forall x \in \mathbb{R}) : 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x} > 0$ و منه :

$(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) = \ln e^x + \ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}) = 2x + \ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x})$.

ـ لدينا حسب السؤال السابق:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-\dfrac{2}{\sqrt{e^x}}+\dfrac{2}{e^x}) = \ln 1 = 0$ (لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{e^x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x} = 0$).

و بالتالي المستقيم $(\mathcal{D}) : y = 2x$ مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

5- أ- لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \ (\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2) = e^x - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 = e^x - 3\sqrt{e^x}+2$$

ـ لدينا : $\sqrt{e^x}-2=0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x}=2 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow x=\ln 4$ و حسب ـ من السؤال 3 الجزء الأول لدينا:

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-1$			0	$+$		$+$	
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ج- حسب 5- أ لدينا $(\forall x \in [0,\ln 4]) : \ e^x - 3\sqrt{e^x}+2 = (\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2)$.

و حسب الجدول أعلاه: $(\forall x \in [0,\ln 4]) : (\sqrt{e^x}-1)(\sqrt{e^x}-2) \leq 0$ و بالتالي $(\forall x \in [0,\ln 4]) : \ e^x - 3\sqrt{e^x}+2 \leq 0$

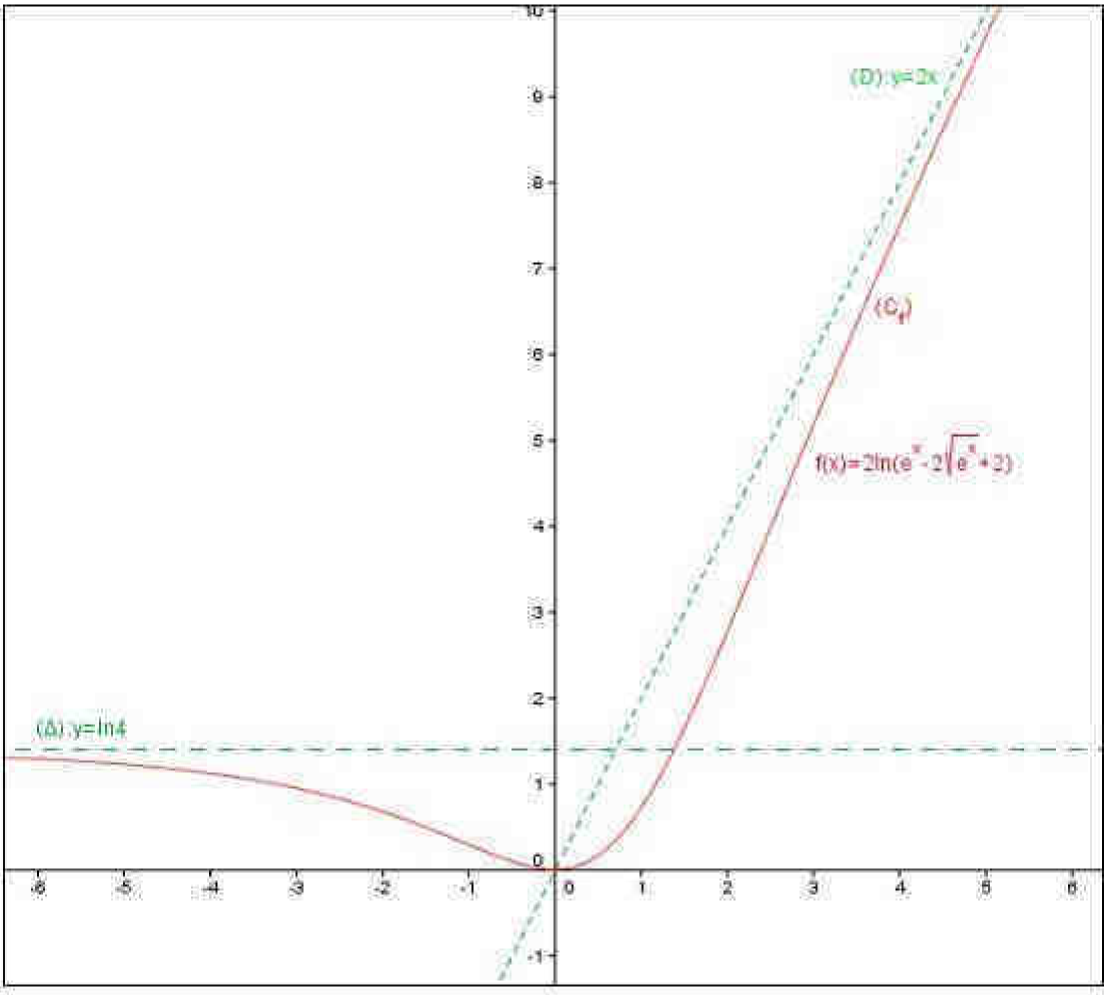
أي $(\forall x \in [0,\ln 4]) : \ e^x - 2\sqrt{e^x}+2-\sqrt{e^x} \leq 0$ و منه $\boxed{(\forall x \in [0,\ln 4]) : \ e^x - 2\sqrt{e^x}+2 \leq \sqrt{e^x}}$

د- لدينا لكل $x \in [0,\ln 4]$

$$\begin{aligned} 0 < e^x - 2\sqrt{e^x}+2 \leq \sqrt{e^x} \ &\Leftrightarrow \ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2) \leq \ln(\sqrt{e^x}) \\ &\Leftrightarrow \ln(e^x-2\sqrt{e^x}+2 \leq \sqrt{e^x}) \leq \frac{1}{2}x \\ &\Leftrightarrow f(x) \leq x \end{aligned}$$

و بالتالي: $\boxed{(\forall x \in [0,\ln 4]) : f(x) \leq x}$

6-



الجزء الثاني :

1- نبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq \ln 4$.

✓ لأجل $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 = 1 \leq \ln 4 (\simeq 1,4)$.

✓ نفترض أن $0 \leq u_n \leq \ln 4$ لأجل $n \in \mathbb{N}$ و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$.

لدينا f تزايدية على $[0, \ln 4]$ و بالتالي $f(0) = 0 \leq f(u_n) \leq f(\ln 4) = \ln 4$ و منه $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$.

✓ و بالتالي : $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq u_n \leq \ln 4}$.

2- لأجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \leq 0$ و ذلك لأنه حسب د- من 5- الجزء الأول و 1- من الجزء الثاني لدينا $(\forall n \in \mathbb{N} ; f(u_n) \leq u_n$ و بالتالي (u_n) تناقصية

3- لدينا:

✓ لدينا f دالة متصلة على $[0, \ln 4]$ و $f([0, \ln 4]) = [0, \ln 4]$.

✓ $u_0 \in [0, \ln 4]$ و $(\forall n \in \mathbb{R}) : f(u_n) = u_{n+1}$.

✓ (u_n) تناقصية و مصغورة بـ 0 و بالتالي فهي متقاربة و نهايتها حل للمعادلة $f(x) = x$ في المجال $[0, \ln 4]$.

و لدينا:

$$\begin{aligned}
f(x) = x \quad & \Leftrightarrow 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = x \\
& \Leftrightarrow \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \tfrac{1}{2}x \\
& \Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^{\frac{1}{2}x} \\
& \Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \sqrt{e^x} \\
& \Leftrightarrow e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = 0 \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = 0
\end{aligned}$$

و بالتالي حلول المعادلة $f(x) = x$ هي 0 و $\ln 4$ و بما أن (u_n) تناقصية فإن $\lim u_n < u_0 = 1$

و لدينا $\ln 4 > \ln e = 1$ و بالتالي $\boxed{\lim u_n = 0}$

انتهى