تصحيح الامتحان التجريبي الموحد / 2007 / ثانوية دمنات التأهيلية / دمنات- أزيلال / إعداد الأستاذ: سعيد الدحاني

التمرين الأول:

1-تمثيل بارا متري للمستقيم (D) :

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad (t \in IR) \\ z = 1-t \end{cases}$$

2-لتحديد احداثيات النقطة B نحل النظمة:

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$$

ومنه $(1+t)+(-1+t)-(1-t)-2=0$

أي $t=1$ وبالتالي احداثيات نقطة التقاطع هي $B(2,0,0)$.

3- أ معادلة ديكارتية للفلكة (S) هي :

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=(\sqrt{7})^2$$

أي $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-4=0$

3- ب لدينا $d(A,(P)) = \dfrac{|1-1-1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < \sqrt{7}$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة

مركزها: هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) أي تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) أي النقطة B .

شعاعها: $r' = \sqrt{r^2-d^2} = \sqrt{7-3} = 2$.

4 - معادلة ديكارتية لمستوى (Q) موازي للمستوى (P)، على شكل $x+y-z+d=0$.

المستوى (Q) مماس للفلكة (S) يكافئ $d(A,(Q))=2$

ولدينا : $d(A,(Q))=2 \Leftrightarrow \dfrac{|1-1-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |-1+d| = \sqrt{21}$$

$\Leftrightarrow -1+d=\sqrt{21}$ أو $-1+d=-\sqrt{21}$

$\Leftrightarrow d=1+\sqrt{21}$ أو $d=1-\sqrt{21}$

و منه معادلتي المستويين الموازيين للمستوى (P) والمماسين للفلكة (S) : هما $x+y-z+1+\sqrt{21}=0$

و $x+y-z+1-\sqrt{21}=0$

التمرين الثاني :

لدينا : $P(z)=z^3-2(2+3i)z^2-4(1-5i)z+16(1-i)$

1- أ- لدينا $P(2)=2^3-2(2+3i)2^2-4(1-5i)2+16(1-i)$

$$=8-8(2+3i)-8(1-5i)+16(1-i)$$
$$=8(1-2-3i-1+5i+2-2i)$$
$$=0$$

ومنه $z_0=2$ جذر للحدودية P .

1-ب لدينا : $P(z)=(z-2)(z^2+az+b)$

$$= z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=-2(2+3i) \\ b-2a=-4(1-5i) \\ -2b=16(1-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2-2(2+3i)=-2(1+3i) \\ b=-8(1-i) \end{cases}$$

وبالتالي : $P(z)=(z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))$

1- ج لدينا :

$$P(z)=0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2-2(1+3i)z-8(1-i))=0$$

$\Leftrightarrow z-2=0$ أو $z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0$

$\Leftrightarrow z=2$ أو $z^2-2(1+3i)z-8(1-i)=0 \quad (*)$

لنحل المعادلة $(*)$:

لدينا : $\Delta'=b'^2-ac=(1+3i)^2+8(1-i)=-2i=(1-i)^2$

ومنه : $z_1=(1+3i)+(1-i)=2+2i$

و $z_2=(1+3i)-(1-i)=4i$

وبالتالي $S=\{2,2+2i,4i\}$

2- لدينا $z_0z_2=8i$ و $z_1{}^2=(2+2i)^2=8i$ أي $z_0z_2=z_1{}^2$

إذن z_0 و z_1 و z_2 حدود متتابعة من متتالية هندسية .

وبما أن $u_0=z_0$ فإن $u_1=z_1$ وبالتالي $q=\dfrac{z_1}{z_0}=1+i$

و $u_{16}=u_0q^{16}=2(1+i)^{16}=2(2i)^8=2^9i^8=2^9$

3- النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

يعني $\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

يكافئ $(z_A-z_G)-(z_B-z_G)+(z_C-z_G)=0$

يكافئ $z_G=z_A-z_B+z_C$

يكافئ $z_G=2i$

التمرين الثالث:

1- لدينا $I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_1=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$

أي $I_1=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\left[-e^{-x}\right]_0^1$

بالتالي $I_1=1-\dfrac{2}{e}$

2- لكل $n \in IN^*-\{1\}$ لدينا $I_n=\int_0^1 x^n e^{-x}dx$

نضع : $\begin{cases} u(x)=x^n \\ v'(x)=e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=nx^{n-1} \\ v(x)=-e^{-x} \end{cases}$

ومنه $I_n=\left[-x^n e^{-x}\right]_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx$

أي $I_n=nI_{n-1}-\dfrac{1}{e}$

2-ب حسب العلاقة الأخيرة لدينا

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2(1-\frac{2}{e}) - \frac{1}{e}$$

أي $I_2 = 2 - \frac{5}{e}$

و $I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3(2-\frac{5}{e}) - \frac{1}{e}$

أي $I_3 = 6 - \frac{16}{e}$

2-ج لدينا : $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2)e^{-x}dx = \int_0^1 (2x^3e^{-x} - 4x^2e^{-x})dx$

$$= 2\int_0^1 x^3e^{-x}dx - 4\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

$$= 2I_3 - 4I_2$$

$$= 2(6-\frac{16}{e}) - 4(2-\frac{5}{e})$$

$$= 4(1-\frac{3}{e})$$

3-أ لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx$

و بما أن الدالة $x -> x^n(x-1)e^{-x}$ سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 x^n(x-1)e^{-x}dx < 0$ و منه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية.

ولدينا لكل $n \in IN^*$ الدالة $x -> x^n e^{-x}$ موجبة على المجال $[0,1]$

إذن $\int_0^1 x^n e^{-x}dx > 0$ أي $I_n > 0$

ومنه المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0 .

3-ب بما أن المتتالية $(I_n)_{n\in IN^*}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .

3-ج لدينا على المجال $[0,1]$ $e^{-x} \le 1$

ومنه $x^n e^{-x} \le x^n$ لكل $n \in IN^*$

و بالتالي $\int_0^1 x^n e^{-x}dx \le \int_0^1 x^n dx$

أي $I_n \le \frac{1}{n+1}$

بما أن $0 < I_n \le \frac{1}{n+1}$ و $\lim_{x->+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

فإن $\lim_{n->+\infty} I_n = 0$.

المسألة :

الجزء الأول:

1- لدينا $\lim_{x->0^+} g(x) = \lim_{w->0^+} x+1-\ln(x) = +\infty$

و $\lim_{x->+\infty} g(x) = \lim_{x->+\infty} x+1-\ln(x)$

$$= \lim_{x->+\infty} x(1+\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x})$$

$$= +\infty$$

2- لكل x من IR^{*+} لدينا $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على المجال $]0,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2	↗ $+\infty$

3- لدينا 2 قيمة دنيا للدالة g أي أن لكل x من IR^{*+} $g(x) \ge 2$

و بالتالي لكل x من IR^{*+} $g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

1- لدينا $\lim_{x->0^+} f(x) = \lim_{x->0^+} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = 0$

ومنه $\lim_{x->0^+} f(x) = f(0)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

لدينا $\lim_{x->+\infty} f(x) = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = +\infty$

2- أ لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا :

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} = e^{\ln(x)+\frac{1}{x}\ln(x)} = e^{\ln(x)}e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

$$= xe^{\frac{1}{x}\ln(x)}$$

وبالتالي $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$

2- ب لدينا :

$$\lim_{x->0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x->0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->0^+} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0

تأويل هندسي : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس أفقي في النقطة o أصل المعلم.

2- ج لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->+\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$

2- د لدينا : $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{x->+\infty} \frac{xe^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{\ln(x)}$

$$= \lim_{x->+\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1)}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x->+\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}$$

نضع : $t = \frac{\ln(x)}{x}$

لدينا : $x -> +\infty \Rightarrow t -> 0$

ومنه $\lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)} = \lim_{t->0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

استنتاج: $\lim_{x->+\infty} f(x) - x = \lim_{x->+\infty} \frac{f(x)-x}{\ln(x)}\ln(x) = +\infty$

منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

3- لكل x من المجال $]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=(e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)})'$

$$=(\frac{x+1}{x}\ln(x))'e^{\frac{x+1}{x}\ln(x)}$$

$$=((\frac{x+1}{x})'\ln(x)+\frac{x+1}{x}\ln'(x))f(x)$$

$$=(\frac{-1}{x^2}\ln(x)+\frac{x+1}{x^2})f(x)$$

$$=\frac{x+1-\ln(x)}{x^2}f(x)$$

$$=\frac{g(x)}{x^2}f(x)$$

وبما أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$ (حسب س 3 من ج 1)

فإن $f'(x)\geq 0$ لكل x من $]0,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

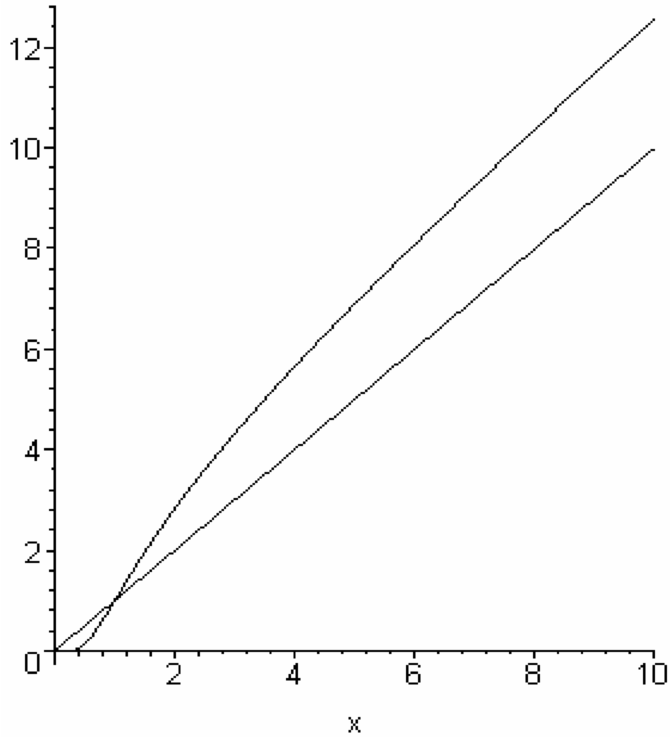
4-أ حساب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

$$f(1)=e^{\frac{1}{2}\ln(1)}=e^0=1$$

$$f(2)=e^{\frac{3}{2}\ln(2)}=e^{\ln(2^{\frac{3}{2}})}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$$

$$f(3)=e^{\frac{4}{3}\ln(3)}=e^{\ln(3^{\frac{4}{3}})}=3^{\frac{4}{3}}$$

4-ب منحنى الدالة f .



الرسم تم باستعمال Logiciel Maple 9.5

5-أ بما أن الدالة g متصلة و موجبة على المجال $[1,\lambda]$ حيث $\lambda>1$

(أنظر الجزء 1) فإن:

$$A(\lambda)=\int_1^{\lambda}g(x)dx.ua$$

$$=\int_1^{\lambda}(x+1-\ln(x))dx.ua$$

$$=(\int_1^{\lambda}(x+1)dx-\int_1^{\lambda}\ln(x)dx).ua$$

$$=([\frac{1}{2}x^2+x]_1^{\lambda}-[x\ln(x)-x]_1^{\lambda}).ua$$

$$=[\frac{1}{2}x^2+x-x\ln(x)+x]_1^{\lambda}.ua$$

$$=[\frac{1}{2}x^2+2x-x\ln(x)]_1^{\lambda}.ua$$

$$=(\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda-\lambda\ln(\lambda)-\frac{5}{2}).ua$$

5- ب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(\frac{1}{2}\lambda^2+2\lambda-\lambda\ln(\lambda)-\frac{5}{2}).ua$

$$=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda^2(\frac{1}{2}+\frac{2}{\lambda}-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}-\frac{5}{2\lambda^2}).uv$$

$$=+\infty$$

الجزء الثالث:

1- لنبين بالترجع أن $1\leq u_n<e \quad \forall n\in IN$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ أي $1\leq u_0<e$

ليكن n من IN نفترض أن $1\leq u_n<e$ ونبين أن $1\leq u_{n+1}<e$

لدينا g دالة تزايدية على المجال $[1,+\infty[$ (أنظر س2 من الجزء1)

ومنه $g(1)\leq g(u_n)<g(e)$ وهذا يعني $2\leq u_{n+1}<e$

وبالتالي $1\leq u_{n+1}<e$

وحسب مبدأ الترجع $1\leq u_n<e \quad \forall n\in IN$.

2- لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية

لكن n من IN لدينا : $u_{n+1}-u_n=g(u_n)-u_n$

$$=u_n+1-\ln(u_n)-u_n$$

$$=1-\ln(u_n)$$

وبما أن $u_n<e$ فإن $\ln(u_n)<\ln(e)$ أي $\ln(u_n)<1$

و بالتالي $1-\ln(u_n)>0$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

3- بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد e فهي متقاربة.

لدينا g متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و تزايدية على $[1,+\infty[$

ومنه g متصلة على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e]\subset]0,+\infty[$

و تزايدية على المجال $[1,e]$ لأن $[1,e]\subset[1,+\infty[$

وبالتالي : $g([1,e])=[2,e]\subset[1,e]$.

وبما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق المعادلة $g(l)=l$

ولدينا $g(l)=l\Leftrightarrow l+1-\ln(l)=l$

$$\Leftrightarrow 1-\ln(l)=0$$

$$\Leftrightarrow \ln(l)=1$$

$$\Leftrightarrow l=e$$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=e$