حلول

تمرين 1

1- مضاعفات العدد14 الأصغر من 200 هي 0 ، 14 ، 28 ، 42 ، 56 ، 70 ، 84 ، 98 ، 112 ، 126 ، 140 ، 154 ، 168 ، 182 ، 196.

2- قواسم العدد1470 هي 1 ، 2 ، 3 ، 5 ،6، 7 ، 10 ، 14 ، 15 ، 21 ، 30 ، 35 ، 42 ، 49 ، 70 ، 98 ، 105 ، 147 ، 210 ، 245 ، 294 ، 490 ، 735 ، 1470.

3- أ- المضاعفات المشتركة للعددين $a=37$ و $b=79$ هي مضاعفات العدد 37×79

ب- $a=65=5\times 13$ و $b=42=2\times 3\times 7$

المضاعفات المشتركة للعددين 65 و 42 هي مضاعفات 65×42

ج- $a=70=2\times 5\times 7$ و $b=14=2\times 7$ هي مضاعفات 14×5

د- $a=46=2\times 23$ و $b=76=2^2\times 19$ هي مضعفات العدد $2^2\times 19\times 23$

4- أ- $a=54=2\times 3^2$ و $b=42=2\times 3\times 7$

القواسم المشتركة للعددين 54 و 42 هي 1 ، 2 ، 3 ، 6

ب- $a=336=2^4\times 3\times 7$ و $b=80=2^4\times 5$

القواسم المشتركة للعددين 336 و 80 هي 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16

ج- $a=72=2^3\times 3^2$ و $b=35=5\times 7$

القاسم المشترك الوحيد للعددين72 و 35 هو 1

د- $a=83$ و $b=67$ عددان أوليان

القاسم المشترك الوحيد للعددين83 و 67 هو 1

تمرين 2

1- 49 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 7

لدينا الاعداد الاولية 2 ، 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13، 17 لا تقسم العدد 239 و $17^2 \prec 239 \prec 23^2$

إذن العدد 239 أولي

....

....

2- التفكيك إلى جداء عوامل أولية

$675=3^3\times 5^2$ ، $1650=2\times 3\times 5^2\times 11$ ، $5292=2^2\times 3^2\times 7^2$ ، $6250=2\times 5^5$

تمرين 3

1- أ- $a=27=3^3$ و $b=42=2\times 3\times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $2\times 3^3\times 7=378$

ب- $a=19$ و $b=37$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $19\times 37=676$

ج- $a=72=2^3\times 9^2$ و $b=35=5\times 7$

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو $35\times 72=2520$

2- أ- $a=81=3^4$ و $b=126=2\times 3^2\times 7$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو $3^2=9$

ب- $a=19$ و $b=37$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1

ج- $a=72=2^3\times 3^2$ و $b=35=7\times 5$

القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو 1

تمرين 4

نحدد الأرقام a, b, c

-1 العدد 23a4 يقبل القسمة على 3 يعني أن $0 \le a \le 9$ و $a+9$ يقبل القسمة على3

ومنه $a=0$ أو $a=3$ أو $a=6$ أو $a=9$

-2 العدد 23a4 يقبل القسمة على 3 و لا يقبل القسمة على 9 يعني أن $0 \le a \le 9$ و $a+9$ يقبل القسمة على3 و لا يقبل القسمة على 9 ومنه $a=3$ أو $a=6$

-3 العدد 23b5c يقبل القسمة على 3 و على 5 يعني $0 \le b \le 9$ و $c \in \{0;5\}$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3

- إذا كان $c=0$ فان

$0 \le b \le 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=2$ أو $b=5$ أو $b=8$

- إذا كان $c=5$ فان

$0 \le b \le 9$ و $10+b+c$ تقبل القسمة على 3 تعني $b=0$ أو $b=3$ أو $b=6$ أو $b=9$

تمرين5

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $PGCD(m;n)=24$ و $n \le m$

-1 $PGCD(m;n)=24=2^3 \times 3$

العوامل الأولية المشتركة للعددين n و m هي 2 و 3

-2 لدينا $m.n=3456$

$m.n = PGCD(m;n) \times PPCM(m;n)$ و $PGCD(m;n)=24$

ومنه $PPCM(m;n)=\dfrac{3456}{24}=144=2^4 \times 3^2$

وحيث أن $n \le m$ فان

$(m=2^3 \times 3 \times 3 = 72$ و $n=2^3 \times 3 \times 2 = 48)$ أو $(m=2^3 \times 3 \times 3 \times 2 = 144$ و $n=2^3 \times 3 = 24)$

تمرين 6

$a=2^3 \times 3^2 \times 7$

-1 نتأكد أن العدد a يقبل 24 قاسم

$a=2^3 \times 3^2 \times 7 = 24 \times (3 \times 7)$ إذن العدد a يقبل 24 قاسم

-2 نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي k حيث ka مربع كامل (أي مربع عدد صحيح طبيعي)

لدينا $a=2^3 \times 3^2 \times 7$ ومنه $2 \times 7 \times a = 2^4 \times 3^2 \times 7^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$ و منه $k=14$

-3 نحدد أصغر عدد صحيح طبيعي m حيث ma مكعب لعدد صحيح طبيعي

لدينا $a=2^3 \times 3^2 \times 7$ ومنه $3 \times 7^2 \times a = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$ و منه $k=147$

تمرين 7

-1 نبين أن مجموع خمسة أعداد صحيحة طبيعية متتالية هو عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على5

ليكن a عدد صحيح طبيعي

$$a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10=5(a+2)$$

وحيث أن $(a+2) \in \mathbb{N}$ فان $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)$ يقبل القسمة على5

-2 ليكن a عدد صحيح طبيعي

نبين أن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

$$\begin{aligned}a(a+1)(a+2)(a+3)+1 &= (a^2+a)(a^2+5a+6)+1\\ &= a^4+6a^3+11a^2+6a+1\\ &= a^4+6a^3+2a^2+9a^2+6a+1\\ &= a^4+2a^2(3a+1)+(3a+1)^2\\ &= (a^2+3a+1)^2\end{aligned}$$

إذن $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ مربع كامل

تمرين 8

-1 ننشر $(n+1)^2-n^2$

$$(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1$$

-2 نستنتج أن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين.

لدينا $(n+1)^2-n^2=2n+1$ مهما كانت n من $\mathbb{N}$

إذن كل عدد فردي يكتب على شكل فرق مربع عددين صحيحين طبيعيين متتاليين

-3 طبق الاستنتاج السابق على الأعداد 17 ، 45 ، 101

$$101=2\times 50+1=51^2-50^2 \quad ; \quad 45=2\times 22+1=23^2-22^2 \quad ; \quad 17=2\times 8+1=9^2-8^2$$

تمرين 9

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا

ندرس زوجية كل من $n(n+1)$ و $n+(n+1)+(n+2)$ و $4n^2+4n+1$ و $3n^2+n$

-1 * n و $n+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتاليان ومنه أحدهما زوجي و الآخر فردي

و التالي جداؤهما زوجي إذن $n(n+1)$ زوجي

* لدينا $n+(n+1)+(n+2)=3(n+1)$ و التالي زوجية $n+(n+1)+(n+2)$ هي زوجية $n+1$

إذا كان n زوجيا فان $n+(n+1)+(n+2)$ فرديا

إذا كان n فرديا فان $n+(n+1)+(n+2)$ زوجيا

* لدينا $4n^2+4n+1=2(2n^2+2n)+1$ و حيث أن $(2n^2+2n)\in\mathbb{N}$ فان $4n^2+4n+1$ زوجي

* لدينا $3n^2+n=n(n+3)$

n و $n+3$ ليس لهما نفس الزوجية أي احدهما فردي و الآخر زوجي أي اذا كان n زوجي فان $n+3$ فردي و العكس صحيح

ومنه $n(n+3)$ عدد زوجي إذن $3n^2+n$ زوجي

تمرين 10

ليكن n و m عددين صحيحين طبيعيين حيث $m\succ n$

-1 نبين أن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

العدد $(m-n)$ يمكن أن يكون زوجيا أو فرديا

* إذا كان $(m-n)$ زوجيا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n=2(k+n)$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ زوجي

* إذا كان $(m-n)$ فرديا فانه يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $m-n=2k+1$ بإضافة $2n$ لطرفي المتفاوتة

نحصل على $m+n=2k+2n+1=2(k+n)+1$ وحيث أن $k+n\in\mathbb{N}$ فان $m+n$ فرديا

إذن $m+n$ و $m-n$ لهما نفس الزوجية

2- نحل المعادلة $m^2-n^2=196$

$m^2-n^2=196$ تكافئ $(m-n)(m+n)=2^2\times 7^2$

و حيث 196 زوجي فان $m+n$ و $m-n$ زوجيان

ومنه $\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=98 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m-n=14 \\ m+n=14 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} m=50 \\ n=48 \end{cases}$ أو $\begin{cases} m=14 \\ n=0 \end{cases}$

تمرين 11

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا

1- تأكد n^2-1 مضاعف للعدد 8 في الحالات التالية $n=1$; $n=3$; $n=5$; $n=7$

....

2- بين أن n^2-1 مضاعف للعدد 8 كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي الفردي n

ليكن n عدد صحيح طبيعي فردي أي يوجد k من $\mathbb{N}$ حيث $n=2k+1$

لدينا $n^2-1=(n-1)(n+1)$ ومنه $n^2-1=4k(k+1)$

وحيث أن $k(k+1)$ عدد زوجي (لأنه جداء عددين متتاليين)

فانه يوجد k' من $\mathbb{N}$ حيث $k(k+1)=2k'$ و بالتالي $n^2-1=8k'$

إذن n^2-1 مضاعف للعدد8

تمرين 12

ليكن n و m و k أعداد صحيحة طبيعية

نبين أنه إذا كان $3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد k فان n و m مضاعفين للعدد k.

$3n+2m$ و $7n+5m$ مضاعفين للعدد k ومنه يوجد عددين صحيحين طبيعيين a و b حيث

$3n+2m=ak$ و $7n+5m=bk$ ومنه $\begin{matrix} 7\times \\ 3\times \end{matrix}\begin{cases} 3n+2m=ak \\ 7n+5m=bk \end{cases}$ و $\begin{matrix} 5\times \\ 2\times \end{matrix}\begin{cases} 3n+2m=ak \\ 7n+5m=bk \end{cases}$

أي $\begin{cases} 21n+14m=7ak \\ 21n+15m=3bk \end{cases}$ و

ومنه $(21n+15m)-(21n+14m)=3bk-7ak$ و $(15n+10m)-(14n+10m)=5ak-2bk$

و بالتالي $m=(3b-7a)k$ و $n=(5a-2b)k$

إذن n و m مضاعفين للعدد k.

تمرين 13

1- ننشر $(10^6-1)^3$

$$(10^6-1)^3=10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-1$$

2 – نستنتج باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5

$$\begin{aligned} 999999^3=(10^6-1)^3 &= 10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-1 \\ &= 10^{18}-3\times 10^{12}+3\times 10^6-5+4 \\ &= 5(2\times 10^{17}-3\times 5\times 10^{11}+3\times 2\times 10^5-1)+4 \end{aligned}$$

وحيث أن $\left(2\times10^{17}-3\times5\times10^{11}+3\times2\times10^{5}-1\right)\in\mathbb{N}$ فان باقي القسمة للعدد 999999^3 على 5 هو 4

تمرين 14

1- نحل المعادلة $(x+1)(y+6)=35$ $\qquad (x;y)\in\mathbb{N}^2$

ليكن $(x;y)\in\mathbb{N}^2$

$(x+1)(y+6)=35$ ومنه $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $1\leq x+1\leq 35$ $6\leq y+6\leq 35$

أي $x+1$ و $y+6$ يقسمان العدد 35 و $0\leq x\leq 34$ و $0\leq y\leq 29$

و حيث أن قواسم 35 هم 1 و 5 و 7 و 35 فان

$\begin{cases}x+1=1\\y+6=35\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+1=5\\y+6=7\end{cases}$ إذن $\begin{cases}x=0\\y=29\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$

2- نحدد x و y من $\mathbb{N}$ حيث $x+y=504$ و $PGCD(x;y)=24$

لدينا $PGCD(x;y)=24$ و منه يوجد عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمين a و b حيث $x=24a$

و $y=24b$ حيث $PGCD(a;b)=1$

و حيث أن $x+y=504$ فان $24a+24b=504$ و منه $a+b=21$

و بالتالي $\begin{cases}a=1\\b=20\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=2\\b=19\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=4\\b=17\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=5\\b=16\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=8\\b=13\end{cases}$ أو $\begin{cases}a=10\\b=11\end{cases}$

و نحصل على نتائج الأخرى بإعطاء قيم a للعدد b و العكس لان a و b يلعبان دوران متامثلان .

و بالتعويض في $x=24a$ و $y=24b$ نحصل على نتائج..............

3- نحدد الأرقام x و y بحيث العدد الصحيح الطبيعي $11x1y$ قابل للقسمة على28

العدد $11x1y$ قابل للقسمة على28 ومنه $11x1y$ قابل للقسمة على4 و 7

ومنه $1y$ قابل للقسمة على 4 و بالتالي $y=2$ أو $y=6$

* إذا كان $y=2$ فان $11x12=11012+x\times10^2=7\times1573+1+x\times10^2$

وحيث $11x12$ قابل للقسمة على 7 فان $x\times10^2+1=\overline{x01}$ يقبل القسمة على 7

ومنه $x=3$

* إذا كان $y=6$ فان $11x62=11016+x\times10^2=7\times1573+5+x\times10^2$

وحيث $11x16$ قابل للقسمة على 7 فان $x\times10^2+5=\overline{x05}$ يقبل القسمة على 7

ومنه $x=8$ أو $x=3$

إذن $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=8\\y=6\end{cases}$

تمرين 15

ليكن n و k من $\mathbb{N}$

1- نتأكد إذا كانت $n=5k+1$ أو $n=5k+4$ فان n^2-1 يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=5k+1$ فان $n^2-1=25k^2+10k=5\left(5k^2+2k\right)$

ومنه n^2-1 يقبل القسمة على 5

اذا كان $n=5k+4$ $n^2-1=25k^2+40k+15=5\left(5k^2+40k+3\right)$

و منه n^2-1 يقبل القسمة على 5

نتأكد إذا كانت $n=5k+2$ أو $n=5k+3$ فان n^2+1 يقبل القسمة على 5

بنفس الطريقة.....................................

2- نبين أنه مهما كان n من $\mathbb{N}$ فان العدد $n\left(n^4-1\right)$ يقبل القسمة على 5

* إذا كانت n لا تقبل القسمة 5 فان $n=5k+1$ أو $n=5k+2$ أو $n=5k+3$ أو $n=5k+4$

ومنه n^2-1 يقبل القسمة على 5 أو n^2+1 يقبل القسمة على 5

و بالتالي $n^4-1=\left(\mathrm{n}^2-1\right)\left(n^2+1\right)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n\left(n^4-1\right)$ يقبل القسمة على 5

* إذا كانت n تقبل القسمة 5 فان $n\left(n^4-1\right)$ يقبل القسمة على 5

إذن $n\left(n^4-1\right)$ يقبل القسمة على 5 مهما كانت n من $\mathbb{N}$