

المجموعات \mathbb{N} و \mathbb{Z} و ID و \mathbb{Q} و \mathbb{R}

القدرات المنتظرة

- * إدراك العلاقات بين الأعداد والتميز بين مختلف مجموعات الأعداد.
- * تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.

(I) المجموعات \mathbb{N} و \mathbb{Z} و ID و \mathbb{Q} و \mathbb{R}

أنشطة

$a \in E$ تعني a عنصر من E و تقرأ a تنتمي الى E
ضع العلامة \times في الخانة المناسبة

1,33.....	$\sqrt{100}$	$\sqrt{2}$	π	$\frac{22}{7}$	-4	3,14	$-\frac{250}{3}$	5	
									$\in \mathbb{N}$
									$\in \mathbb{Z}$
									$\in ID$
									$\in \mathbb{Q}$
									$\in \mathbb{R}$

1- مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية

تذكير

* مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية هي $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots\}$

الاعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة الاعداد الصحيحة النسبية يرمز لها بـ \mathbb{Z}
نكتب $\mathbb{Z} = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

-5 عدد صحيح نسبي نكتب $-5 \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}$ ليس عددا صحيحا نسبيا نكتب $\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

0 العدد الصحيح النسبي المنعدم

* نرمز لمجموعة الاعداد الصحيحة النسبية الغير المنعدمة بـ \mathbb{Z}^*

$\mathbb{Z}^* = \{\dots; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

ملاحظة: كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي

نقول ان المجموعة \mathbb{N} جزء من المجموعة \mathbb{Z} أو المجموعة \mathbb{N} ضمن المجموعة \mathbb{Z}

نكتب $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

2- مجموعة الأعداد العشرية النسبية

اكتب الاعداد التالية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$

3,12 ، 7 ، -3 ، -0,256

تعريف

كل عدد له كتابة كسرية على شكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}$ يسمى عددا

عشريا نسبيا.

نرمز لمجموعة الاعداد العشرية النسبية بـ ID

نتائج

أ - العدد العشري له كتابة بعدد منته من الأرقام على يمين الفاصلة.

ب- كل عدد صحيح نسبي a هو عدد عشري نسبي (لأنه يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{10^0}$)

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset ID$

3- مجموعة الأعداد الجذرية

تعريف

العدد الجذري هو كل عدد يمكن كتابته على شكل $\frac{a}{b}$ حيث $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}$ و $b \neq 0$

يرمز لمجموعة الأعداد الجذرية بـ \mathbb{Q}

$\frac{-3}{7}$ عدد جذري ، 6 عدد جذري ، $-1,36$ عدد جذري π ليس عددا جذريا

$\sqrt{3}$ ليس عددا جذريا

نتيجة

كل عدد عشري نسبي هو عدد جذري

إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q}$

4- مجموعة الأعداد الحقيقية

- بين أن $\sqrt{2}$ عدد لا جذري

أرسم مربع ضلعه 1 و حدد طول قطره

- نصف محيط دائرة شعاعها 1 هو عدد لا جذري يرمز له بـ π

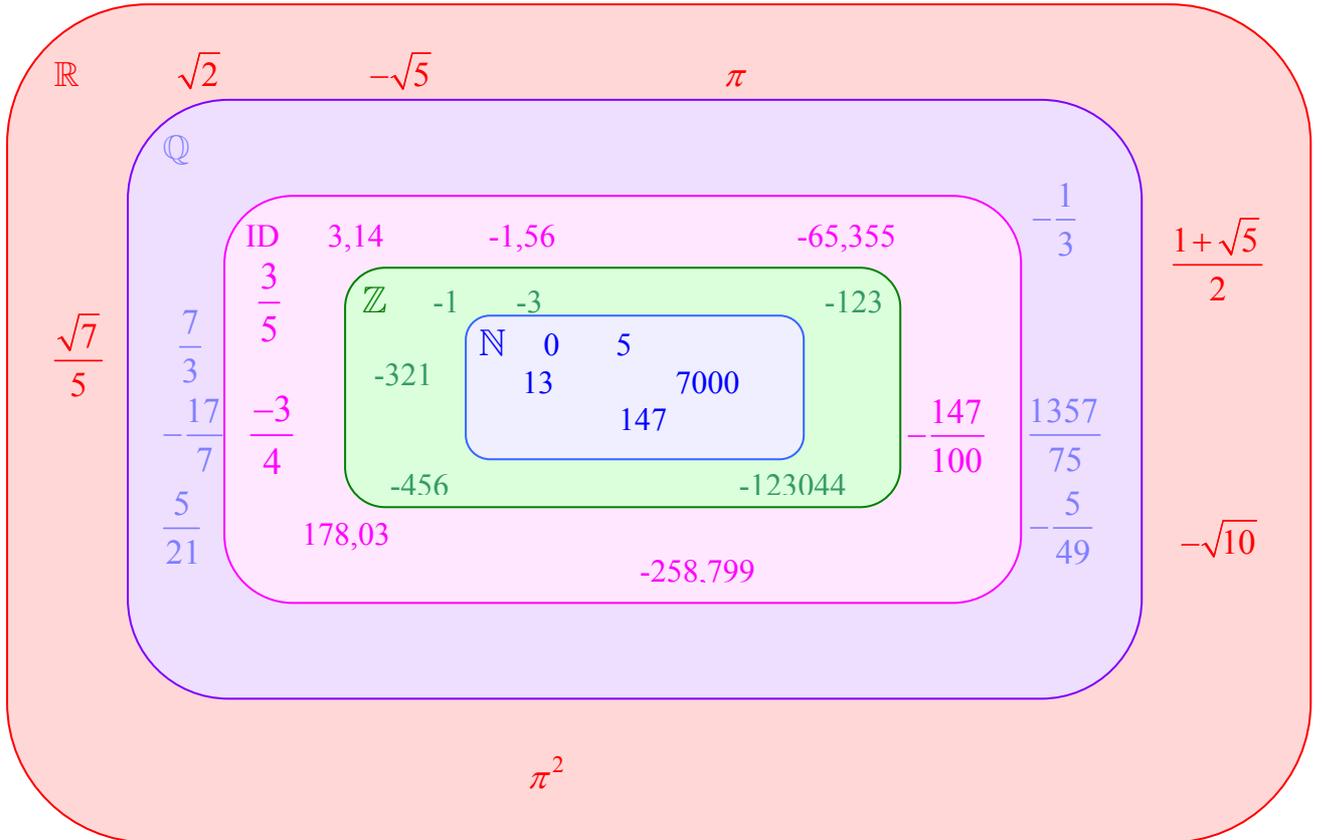
توجد مقادير لا يمكن التعبير عنها بأعداد جذرية ، مثل هذه المقادير نعبّر عنها بأعداد لا جذرية.

الأعداد الجذرية و الأعداد لا جذرية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية

يرمز لها بـ \mathbb{R}

نتيجة

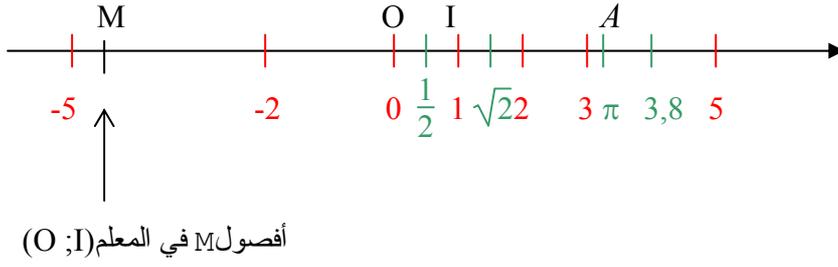
كل عدد جذري هو عدد حقيقي إذن $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{ID} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



تمثيل المجموعة \mathbb{R}

نمثل المجموعة \mathbb{R} على مستقيم مدرج $\Delta(O;I)$

كل نقطة من المستقيم $\Delta(O;I)$ تقبل عددا وحيدا أفصولا لها
كل عدد حقيقي هو افصول لنقطة و حيدة من المستقيم $\Delta(O;I)$



A هي النقطة ذات الافصول π نكتب $A(\pi)$

(II) العمليات في المجموعة \mathbb{R} و خاصياتها

1 - أنشطة نشاط 1

$$1- \text{أحسب } \frac{5 + \frac{1}{3}}{2 - \frac{3}{2}} - \frac{2}{3} + \frac{7}{6} - \frac{1}{4} - 2$$

2- لتكن a و b و c أعداد حقيقية
أحسب $-2(a+b-c) - 3(a-b+c) + 4(5a-b)$

نشاط 2

1- أحسب $\sqrt{5^2 \times 3^3} + \sqrt{75} - 11\sqrt{3} + 2\sqrt{243}$ و $(\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5})$

2- أ- أحسب $(2 - \sqrt{5})^2$ ثم بسط $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$

ب- بسط $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$; $\sqrt{21 - 6\sqrt{6}}$

3- اجعل المقام عددا جذريا للعددين الحقيقيين $\frac{2 - \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

4- بين أن $\sqrt{7 + \sqrt{48}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} = 4$

نشاط 3

1- عمل $(x+2)^2 + x^2 - 4$ ، $(2x-1)^2 - (3x+2)^2$ ، $27x^3 - 8$; $x^3 + 125 - 5x(x+5)$

2- نضع $a+b=1$; $a^2+b^2=2$ أحسب a^4+b^4 ; a^6+b^6

2- الجمع و الضرب أ- الجمع

* الجمع تبادلي في \mathbb{R} : لكل a و b من \mathbb{R} $a+b = b+a$

* الجمع تجميعي في \mathbb{R} : لكل a و b و c من \mathbb{R} $(a+b)+c = a+(b+c)$

* 0 هو العنصر المحايد للجمع في \mathbb{R} : لكل a من \mathbb{R} $0+a = a+0 = a$

* لكل عدد حقيقي a مقابل هو $-a$: $-a+a = a+(-a) = 0$

ب- الطرح

ليكن a و b من \mathbb{R} $a-b = a+(-b)$

ج- الضرب

* الضرب تبادلي في \mathbb{R} : لكل a و b من \mathbb{R} $a \times b = b \times a$

- * الضرب تجميعي في \mathbb{R} : لكل a و b و c من \mathbb{R} $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
- * 1 هو العنصر المحايد لضرب في \mathbb{R} : لكل a من \mathbb{R} $1 \times a = a \times 1 = a$
- * لكل عدد حقيقي غير منعدم a مقلوب هو $\frac{1}{a}$: $(a^{-1}) \frac{1}{a} = a^{-1} \times a = a \times a^{-1} = 1$
- * الضرب توزيعي على الجمع في \mathbb{R} : لكل a و b و c من \mathbb{R} $(b + c) \cdot a = ba + ca$; $a \cdot (b + c) = ab + ac$

د- الخارج

$$\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b} \quad \text{ليكن } a \text{ من } \mathbb{R} \text{ و } b \text{ من } \mathbb{R}^*$$

ذ- قواعد

- * لتكن a و b و c من \mathbb{R} : $a = b$ تكافئ $a + c = b + c$
- * لتكن a و b من \mathbb{R} و c من \mathbb{R}^* : $a = b$ تكافئ $ac = bc$
- * لكل a و b و c و d من \mathbb{R}
- إذا كان $a = b$ و $c = d$ فإن $a + c = b + d$
- إذا كان $a = b$ و $c = d$ فإن $ac = bd$
- * $ab = 0$ تكافئ $a = 0$ أو $b = 0$
- * $ab \neq 0$ تكافئ $a \neq 0$ و $b \neq 0$
- * لكل a و b من \mathbb{R} و c و d من \mathbb{R}^*
- تكافئ $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ تكافئ $ad = bc$
- * a و b من \mathbb{R} و c و d من \mathbb{R}^*
- $$\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd} \quad , \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \quad , \quad \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{b} \quad \text{* لكل } a \text{ من } \mathbb{R} \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ من } \mathbb{R}^*$$

2- الجذور المربعة

أ- تعريف

ليكن x من \mathbb{R}^+
العدد الحقيقي الموجب y الذي يحقق $y^2 = x$ يسمى لجذر المربع للعدد الموجب x .
نرمز للجذر مربع للعدد x بـ \sqrt{x}
 $x = y^2$; $y \geq 0$ تكافئ $y = \sqrt{x}$; $x \in \mathbb{R}^+$

ب- نتائج

*- ليكن x و y من \mathbb{R}^+ :

$$\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = x \quad ; \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

$$x = y \quad \text{تكافئ} \quad \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$\sqrt{x^2} = -x \quad \text{إذا كان } x \text{ سالبا فان}$$

ملاحظة: لكل عدد حقيقي موجب a يوجد عدنان حقيقيان مربعهما يساوي a هما \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$

3- القوى

أ- تعريف

$$* \text{ ليكن } a \text{ من } \mathbb{R} \text{ و } n \text{ من } \mathbb{N}^* \\ (a \neq 0) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_n \text{ عاملا}$$

العدد a^n يسمى قوة العدد a ذات الأس n
العدد a^{-n} يسمى قوة العدد a ذات الأس $-n$
* ليكن a من \mathbb{R}^* $a^0 = 1$

ب- نتائج

* لكل x و y من \mathbb{R}^* و لكل n و m من \mathbb{Z}

$$x^n x^m = x^{n+m} \quad \frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m} \quad \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n \quad x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$$

* لكل عدد حقيقي موجب x : $\sqrt{x^n} = \sqrt{x}^n$

حالة خاصة لكل x من \mathbb{R} $x^1 = x$

ج- الكتابة العلمية لعدد عشري خاصية (مقبولة)

كل عدد عشري b موجب يكتب على شكل $a \cdot 10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$
هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية للعدد b

أمثلة

الكتابة العلمية للعدد 1740000 هي $1,74 \times 10^6$
الكتابة العلمية للعدد 0,000325 هي $3,25 \times 10^{-4}$

نتيجة:

كل عدد عشري b سالب يكتب على شكل $-a \cdot 10^p$ حيث p عدد صحيح نسبي و a عدد عشري يحقق $1 \leq a \leq 10$

$$-0,000325 = -3,25 \times 10^{-4} \quad -1,74 \times 10^6 = -1740000$$

4- متطابقات هامة

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \mathbb{R} \text{ ليكن } a \text{ و } b$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

5- النشر و التعميل

نشر جداء هو تحويله إلى مجموع
تعميل مجموع هو تحويله إلى جداء