

## النظـمات

\* حل نظمات من الدرجة الأولى بمجهولين باستعمال مختلف الطرق (التأليفة الخطية، التعويض، المحددة).  
\* التمثيل المبياني لحلول متراجحات أو نظمات متراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين، واستعماله في تجويبه المستوى وحل مسائل بسيطة حول البرمجة الخطية.

### I- معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

#### 1- أنشطة

نعتبر في  $\mathbb{R}^2$  المعادلة  $3x - 2y + 1 = 0$

هل الأزواج  $(1; 2)$  و  $(-1; 2)$  و  $(0; \frac{1}{2})$  حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة  
لتكن  $S$  مجموعة الحلول

$$S = \left\{ \left( a; \frac{3a+1}{2} \right) / a \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{إذن} \quad \text{نضع } x = a \text{ ومنه } y = \frac{3a+1}{2}$$

#### 2- تعريف

كل معادلة على شكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حل المعادلة  $ax + by + c = 0$  هو إيجاد جميع الأزواج التي تحققها

#### تمرين

حل في  $\mathbb{R}^2$  المعادلات  $2x + y - 1 = 0$  ;  $3x - 1 = 0$  ;  $2y + 4 = 0$

### II - النظـمات

#### 1- أنشطة

أ- بين أن النظمة  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$  تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين

مختلفتين ( التعويضية و التأليفة الخطية )

ب- بين أن النظمة  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -\frac{2}{3}x + y = -2 \end{cases}$  لا تقبل حلا

### 2- دراسة نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

#### أ- تعريف

نسمي نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل نظمة من شكل:  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  أعداد حقيقية.

#### ب- دراسة عامة

لنحل في  $\mathbb{R}^2$  النظمة  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = b'c - bc' \\ a(a'x + b'y) - a'(ax + by) = ac' - a'c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - ba')x = b'c - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

ومن هنا حل النظمة يتوقف على العدد  $ab' - a'b$

العدد  $ab' - a'b$  يسمى محددة النظمة نرسم له ب  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

\* إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$  فإن النظمة تقبل حلا وحيدا

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} \quad \text{و} \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

$$* \text{ إذا كان } ab' - a'b = 0 \text{ فإن } \begin{cases} b'c - bc' = 0 \\ ac' - a'c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- إذا كان  $ac' - a'c = 0$  و  $b'c - bc' = 0$  فإن  $S$  هي مجموعة حلول المعادلة  $ax + by = c$   
- إذا كان  $ac' - a'c \neq 0$  أو  $b'c - bc' \neq 0$  فإن  $S = \emptyset$

### تعريف و خاصة

نعتبر  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  أعداد حقيقية حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

$$* \text{ العدد } ab' - a'b \text{ يسمى محددة النظام } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ } (x; y) \in \mathbb{R}^2 \text{ نرسم له ب } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \text{ نكتب}$$

$$* \text{ للنظمة } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ حل وحيد إذا فقط إذا كان } ab' - a'b \neq 0$$

في هذه الحالة تسمى النظام نظام كرامر و حل النظام هو:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \text{ حيث } x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta} ; y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$* \text{ للنظمة } \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \text{ ما لانهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا فقط إذا كان } ab' - a'b = 0$$

في هذه الحالة: - إذا كان  $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$  و  $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$  فإن  $S$  هي مجموعة حلول المعادلة  $ax + by = c$

- إذا كان  $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$  أو  $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0$  فإن  $S = \emptyset$

### تمرين

$$\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$$

$$-1 \text{ حل في } \mathbb{R}^2 \begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \end{cases} \begin{cases} 2\sqrt{3}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{3}y = 3 \end{cases}$$

$$-2 \text{ حل و ناقش وفق البارامتر } m \text{ للنظمة } \begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

### -3 نظمات تالفة أخرى

أ- نظام ثلاث معادلات بمجهولين

حل في  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 2y = -4 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$$

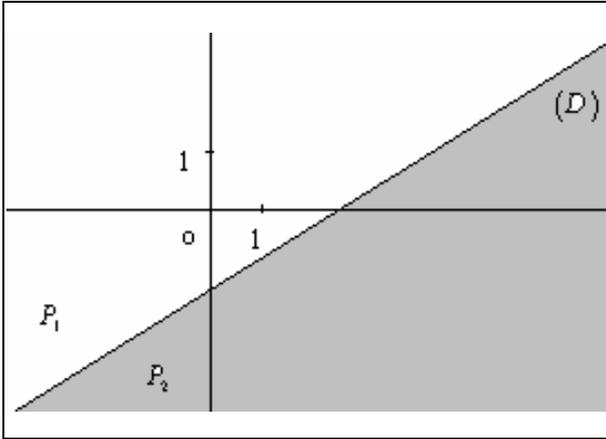
ب- نظام معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

حل في  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

### III- المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

-1 إشارة  $ax + by + c$



كل مستقيم  $(D)$  معادلته  $ax + by + c = 0$  يحدد في المستوى  
نصفي مستوي مفتوحين  $P_1$  و  $P_2$  (لايتضمنان  $(D)$ )  
أحدهما هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c < 0$   
و الأخر هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c > 0$

### ملاحظة

لتحديد إشارة  $ax + by + c$  يكفي تحديدها من أجل زوج إحداثيتي نقطة  $A$  من المستوى لا تنتمي إلى  $(D)$  نصف المستوى الذي يحتوي على  $A$  وحافته  $(D)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تكون فيه إشارة  $ax + by + c$  هي إشارة  $ax_0 + by_0 + c$ . و نصف المستوى الآخر هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  التي تكون فيه إشارة  $ax + by + c$  هي عكس إشارة  $ax_0 + by_0 + c$

### أمثلة

أدرس في  $\mathbb{R}^2$  إشارة كل من  $-2x + 3y - 2$  و  $2y - 1 >$

### تمرين

حل في  $\mathbb{R}^2$  ميانيا

$$\begin{cases} 3x + y < 0 \\ x - y + 4 > 0 \\ 2x + 5y + 8 > 0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} 2x + y < 0 \\ 3x + y \leq 2 \end{cases}$$

### 2- البرمجة الخطية

#### تمرين

يصنع صانع منتوجين  $A$  و  $B$  بواسطة مواد أولية  $M_1$  و  $M_2$  و  $M_3$ .

يتطلب صنع وحدة من المنتج  $A$ : 1 كيلو من  $M_1$  و 3 كيلو من  $M_2$  و 3 كيلو من  $M_3$ .

يتطلب صنع وحدة من المنتج  $B$ : 2 كيلو من  $M_1$  و 2 كيلو من  $M_2$  و كيلو واحد من  $M_3$ .

المواد المتوفرة في اليوم الواحد هو 20 كيلو من  $M_1$  و 30 كيلو من  $M_2$  و 27 كيلو من  $M_3$ .

إذا علمت أن بيع وحدة من نوع  $A$  يحقق ربحا قدره 40 درهما و بيع وحدة من نوع  $B$  يحقق ربحا قدره 20 درهما. فما هو عدد وحدات منتج  $A$  و عدد وحدات منتج  $B$  اللذان يحققان أكبر ربح؟

لتكن  $x$  عدد وحدات منتج  $A$  و  $y$  عدد وحدات منتج  $B$

لإنتاج  $A$  و  $B$  يتطلب  $(x + 2y)Kg$  من  $M_1$  حيث  $x + 2y < 20$  و  $(3x + 2y)Kg$  من  $M_2$  حيث

$3x + 2y < 30$  و  $(3x + y)Kg$  من  $M_3$  حيث  $3x + y < 27$

الزوج  $(x; y)$  الذي يمثل إنتاج ينتمي إلى مجموعة حلول

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y - 20 < 0 \\ 3x + 2y - 30 < 0 \\ 3x + y - 27 < 0 \end{cases}$$

الربح هو  $40x + 20y$

نعتبر  $(\Delta_0): 40x + 20y = 0$  و  $(\Delta_b): 40x + 20y = b$  حيث  $b$  ربح عند إنتاج  $x$  وحدة من منتج  $A$  و  $y$  عدد

وحدة من منتج  $B$  و حيث  $(\Delta_b)$  يحتوي على الأقل على نقطة من الجزء الملون

$b$  تأخذ أكبر قيمة عند زوج إحداثيتي تقاطع المستقيمين ذا المعادلتين  $3x + y = 27$  ;  $3x + 2y = 30$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = (8; 3)$$

الربح القصوي هو  $40 \times 8 + 20 \times 3 = 380DH$

