

تمارين و حلول

تمرين 1

نعتبر f و g دالتين عدديتين لمتغير حقيقي حيث $f(x) = x^2 - 2x$; $g(x) = \frac{-2x-1}{-2x+1}$

1 - حدد مجموعة تعريف الدالة g

2 - أعط جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

3 - أ) أنقل الجدول التالي و أتممه

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$					
$g(x)$					

ب) حدد تقاطع C_f و محور الافاصل

ج) أنشئ المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

الجواب

$$f(x) = x^2 - 2x \quad ; \quad g(x) = \frac{-2x-1}{-2x+1}$$

1 - نحدد مجموعة تعريف الدالة g

ليكن $x \in \mathbb{R}$ تكافئ $-2x+1 \neq 0$ إذن $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

2 - نعطي جدول تغيرات لكل دالة من الدالتين f و g

جدول تعبيرات f $a=1$ $\frac{-b}{2a}=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			

جدول تغيرات g لدينا $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
g			

3 - أ) - نتمم الجدول

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3
$f(x)$	3	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	0	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$

ب) نحدد تقاطع C_f و محور الافاصل

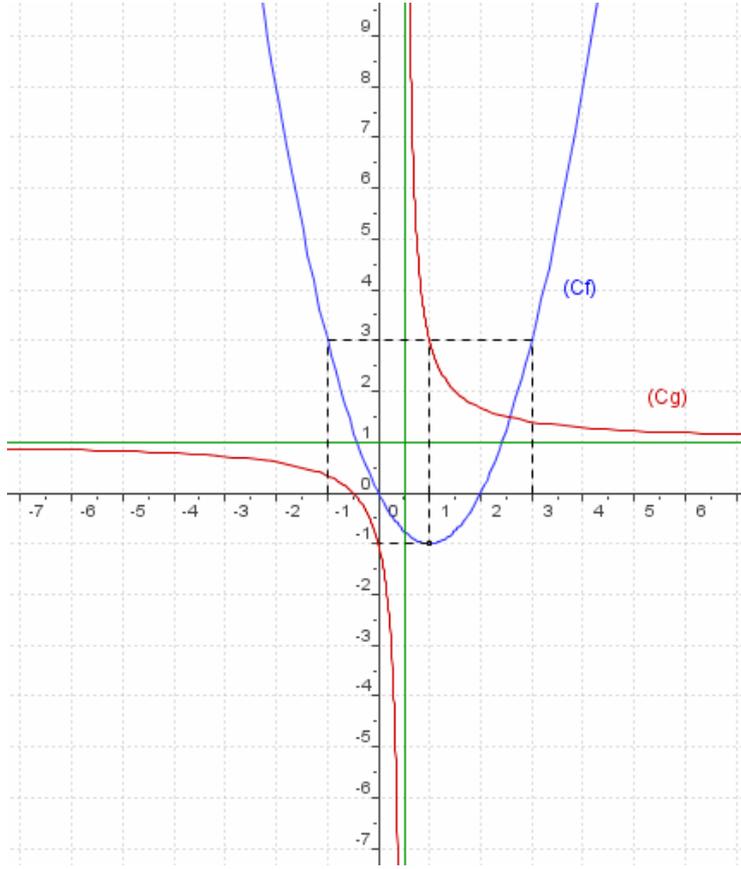
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

إذن C_f يقطع محو الافاصل في النقطتين ذات الافصولين 0 و 2 على التوالي

ج) إنشاء المنحنيين C_f و C_g في نفس المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$



تمرين 2

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$g(x) = x^2 - 3|x| \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

ولیکن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- أحسب $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(2)$ و $g(4)$

2- أعط جدول تغيرات f

3- أ- أدرس زوجية g

ب- بين أن g تناقصية على $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right]$

د- أعط جدول تغيرات g على \mathbb{R}

4- حدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

5- أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

ج- حل مبيانيا المتراجحة $x^2 - 3|x| \geq 0$

الجواب

$$g(x) = x^2 - 3|x| \quad f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

2- أ- نحدد D_f

لتكن $x \in \mathbb{R}$
 $x-1 \neq 0$ تكافئ $x \in D_f$

تكافئ $x \neq 1$
 إذن $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

ب- نحسب $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(2)$ و $g(4)$

$$g(4) = 16 - 12 = 4 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad ; \quad g(2) = 4 - 6 = -2 \quad ; \quad f(2) = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

2- نحدد تغيرات f

لدينا $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$ ومنه f تناقصية على كل من $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	↘		↘

3- أ- ندرس زوجية g

لكل $x \in \mathbb{R}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}$

$$g(-x) = (-x)^2 - 3|-x| = x^2 - 3|x| = g(x)$$

g دالة زوجية

ب- بين أن g تناقصية على $\left]0; \frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا $g(x) = x^2 - 3x$ لكل x من $]0; +\infty[$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2} \quad c=0 \quad b=-3 \quad a=1$$

معامل x^2 هو العدد الموجب 1 و منه الدالة $x \rightarrow x^2 - 3x$ تزايدية $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ و تناقصية على $]-\infty; \frac{3}{2}]$

اذن g تناقصية على $\left]0; \frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

د- نعطي جدول تغيرات g على \mathbb{R}

لدينا g تناقصية على $\left]0; \frac{3}{2}\right[$ و تزايدية على $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$

و حيث أن g زوجية فان g تزايدية على $\left]0; -\frac{3}{2}\right[$ و تناقصية على $]-\infty; -\frac{3}{2}]$

جدول تغيرات g

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
g	↘		↗	↘	↗
		$\frac{9}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	

4- نحدد تقاطع C_g و محور الأفاصيل

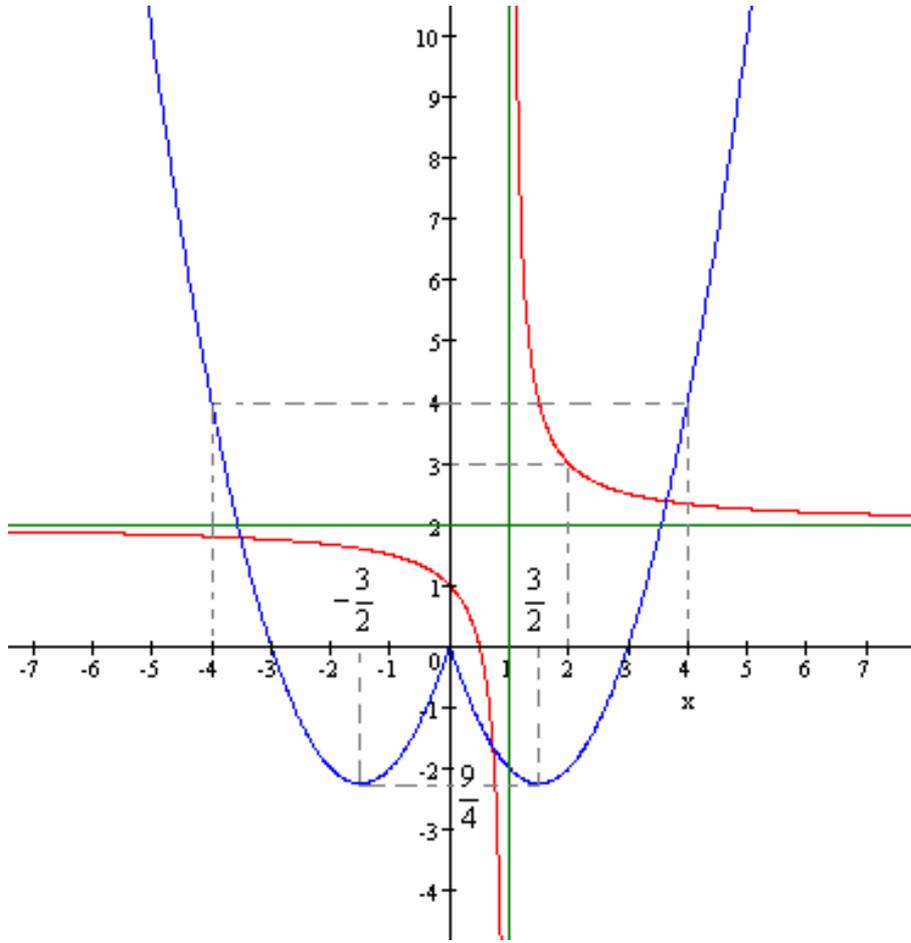
بما أن g زوجية فانه يكفي تحديد تقاطع C_g و محور الأفاصيل على \mathbb{R}^+ و استنتاج التقاطع على \mathbb{R}^-

$$x^2 - 3x = 0 \quad \text{تكافئ} \quad g(x) = 0 \quad \text{ليكن} \quad x \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{تكافئ} \quad x = 3 \quad \text{أو} \quad x = 0$$

إذن C_g و محور الأفاصيل يتقاطعان في النقط ذات الأفاصيل 0 و 3 و -3 على التوالي

5- أ- ننشئ C_f و C_g



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_f و C_g يتقاطعان في ثلاث نقط

ومنه للمعادلة $f(x) = g(x)$ ثلاثة حلول

ج - نحل مبيانيا المتراجحة $x^2 - 3|x| \geq 0$

$x^2 - 3|x| \geq 0$ تكافئ $g(x) \geq 0$ تكافئ C_g فوق محور الأفاصيل

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن C_g فوق محور الأفاصيل أو ينطبقان في $\{0\} \cup [3; +\infty[\cup]-\infty; -3]$

إذن $S =]-\infty; -3] \cup [3; +\infty[\cup \{0\}$

تمرين 3

لتكن f و g الدالتين العدديتين للمتغير الحقيقي x المعرفتين بـ

$$g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1}$$

$$f(x) = x^2 - x$$

وليكن C_f و C_g منحنييهما على التوالي في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3- أ- حدد D_g

ب- أحسب $f(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(2)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

2- أ- أعط جدول تغيرات f

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

3- أ- بين أن g دالة زوجية

ب- حدد تغيرات g و أعط جدول تغيراتها

4-أ- أنشئ C_f و C_g

ب- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

الجواب

$$g(x) = \frac{2|x|-1}{|x|-1} \quad f(x) = x^2 - x$$

4-أ- نحدد D_g

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$|x|-1 \neq 0 \text{ تكافئ } x \in D_g$$

$$|x| \neq 1$$

$$x \neq -1 \text{ و } x \neq 1$$

$$D_g = \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

ب- نحسب $f(2)$ و $g(2)$ و $f\left(\frac{1}{2}\right)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$ و $f(0)$ و $g\left(\frac{1}{2}\right)$

$$g(2) = \frac{2 \times 2 - 1}{2 - 1} = 3 \quad ; \quad f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 0 \quad ; \quad g(0) = \frac{2 \times 0 - 1}{0 - 1} = 1 \quad ; \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

2-أ- نعطي جدول تغيرات f

$$\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \text{ و } a = 1 \text{ أي } f(x) = x^2 - x \text{ لدينا}$$

ومنه جدول تغيرات f

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
f	\swarrow	$-\frac{1}{4}$	\searrow

ب- حدد طبيعته المنحنى C_f

$$C_f \text{ شلجم رأسه } A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \text{ و محور تماثلة المستقيم ذا المعادلة } x = \frac{1}{2}$$

3-أ- نبين أن g دالة زوجية

$$\text{لكل } x \in \mathbb{R} - \{1; -1\} \text{ لدينا } -x \in \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

$$g(-x) = \frac{2|-x|-1}{|-x|-1} = \frac{2|x|-1}{|x|-1} = g(x) \quad \text{ليكن } x \in \mathbb{R} - \{1; -1\}$$

إذن g دالة زوجية

ب- نحدد تغيرات g و نعطي جدول تغيراتها

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-1} \text{ ومنه } |x| = x \quad : \quad [0; 1[\cup]1; +\infty[\text{ لكل } x \text{ من}$$

$$\text{وحيث } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 < 0 \text{ فان } g \text{ تناقصية على كل من }]1; +\infty[\text{ و }]0; 1[$$

و بما أن g دالة زوجية فان g تزايدية على كل من $]1; 0[$ و $]-\infty; -1[$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
g	↗		↘	↘	↘

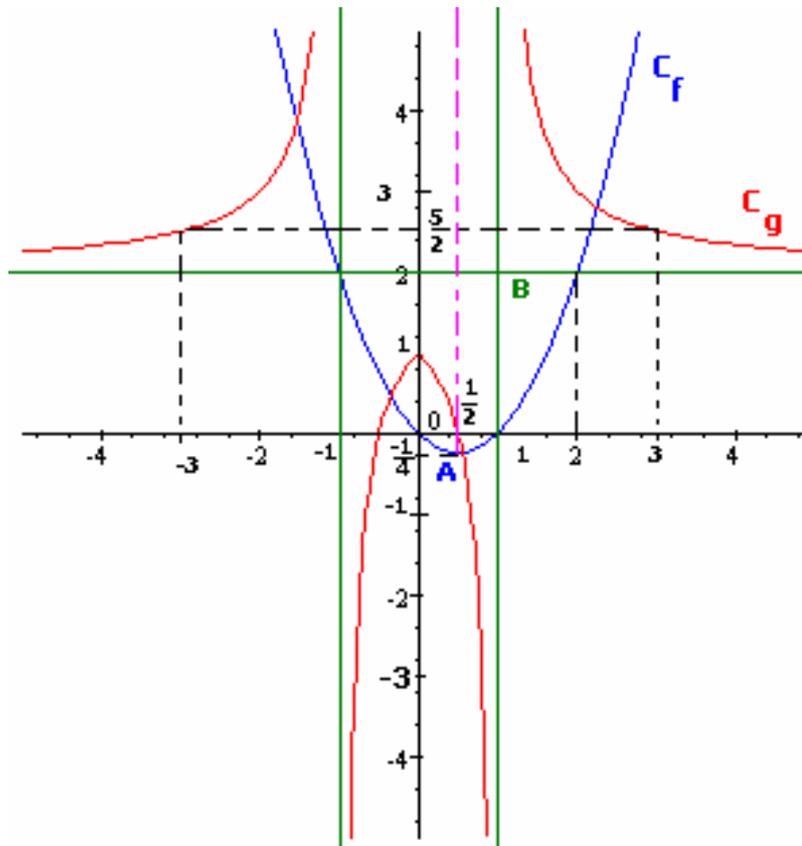
4-أ- ننشئ C_g و C_f

بما أن g زوجية فان C_g متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

جزئ منحنى C_g على $[0;1[\cup]1;+\infty[$ هو جزئ من هذلول مركزه $B(1;2)$ ومقاربا

$(\Delta_1): y=2$ $(\Delta_2): x=1$

C_f شلجم رأسه $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$



ب- نحدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $f(x) = g(x)$

من خلال التمثيل المبياني نلاحظ أن C_g و C_f

يتقاطعان في أربع نقط

ومنه المعادلة $f(x) = g(x)$ تقبل أربعة حلول

تمارين حول الدوال

تمرين 1

نعتبر f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 & x \leq 2 \\ f(x) = \frac{4}{x} & x > 2 \end{cases}$$

- 1- حدد D_f ثم أعط جدول تغيرات الدالة f
- 2- أنشئ (C_f) في مستوى منسوب الى م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

تمرين 2

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x) = -2x^2$ و $g(x) = \frac{1}{4x}$

- 1- أعط جدول تغيرات كل من f و g
- 2- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)
- 3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المستوى المنسوب إلى م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 4- حل مبيانيا المتراجحة $f(x) \geq g(x)$

تمرين 3

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = \frac{1}{|x|}$

- 1- حدد D_f و تأكد أن f دالة زوجية
- 2- أنشئ (C_f)
- 3- أعط جدول تغيرات f

تمرين 4

نعتبر f دالة عددية معرفة بـ $f(x) = 2x|x|$

- 1- بين أن f دالة فردية
- 2- حدد جدول تغيرات f على \mathbb{R}
- 3- أنشئ (C_f)

تمرين 5

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{3}{x}$

- 1- حدد D_g و D_f
- 2- أ- حل في \mathbb{R} المعادلة $2x^2 + x - 3 = 0$
ب- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)
- 3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 4- حل مبيانيا المتراجحة $g(x) \geq 2x + 1$

تمرين 6

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 \quad g(x) = 2x - 1$$

- 1- بين أن (C_f) شلجما محددًا رأسه ثم أعط جدول تغيرات f
- 2- أ- حدد تقاطع (C_f) و محور الأفاصيل
ب- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)
- 3- أنشئ (C_f) و (C_g) في نفس المعلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

4- حل مبانيًا $f(x) - g(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين 7

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$g(x) = \frac{x+1}{x-3} \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$$

- 1- أ- اعط جدول تغيرات f
ب- اعط جدول تغيرات g
- 2- أ- حدد تقاطع (C_f) و (C_g)
ب- أنشئ (C_f) و (C_g)
- 3- حل مبانيًا $f(x) \geq g(x)$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين 8

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x) = \frac{2x-1}{-x+2}$

- 1- أ- حدد D_f
ب- تحقق أن لكل x من D_f
- 2- بين أن (C_f) صورة المنحنى (C) ذا المعادلة $y = \frac{-3}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(2; -2)$
- 3- نعتبر g دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $g(x) = \frac{2|x|-1}{-|x|+2}$

- أ- حدد D_g و بين أن g دالة زوجية
- ب- أنشئ (C_g) في المعلم.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

تمرين 9

- نعتبر f دالة عددية معرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = ax^2 + bx + 1$
- 1- أوجد a و b إذا علمت أن (C_f) تمر من النقطتين $A(1; 5)$ و $B(-1; 1)$
 - 2- نضع $a = b = 2$

أ- أدرس رتبة f على $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right]$ و $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$

- ب- أنشئ (C_f) في مستوى منسوب إلى م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- ج- حدد تقاطع (C_f) و المستقيم $(D): y = 2x + 3$
- ح- حل مبانيًا $f(x) \geq 2x + 3$ $x \in \mathbb{R}$

تمرين 10

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ $f(x) = x|x| - 2x$

- 1- بين أن f دالة فردية
- 2- أ- بين لكل عنصرين مختلفين x و y من $[0; +\infty[$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x + y - 2$$

ب- أدرس رتبة f على كل من $[1; +\infty[$ و $[0; 1]$

ثم أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R}

3- أنشئ (C_f)

4- حدد مبانيًا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $x|x| - 2x - m = 0$

تمرين 11

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$g(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

لتكن $\Omega_1(-2;1)$ و $\Omega_2(1;1)$ نقطتين من مستوى منسوب إلى م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 1- أدرس تغيرات f و g
- 2- أ- حدد تقاطع (C_g) و (C_f)
- ب- أنشئ (C_g) و (C_f)
- 3- حل مبياناً $f(x) \geq g(x)$

تمرين 11

نعتبر f و g الدالتين العدديتين لمتغير حقيقي معرفتين بـ

$$g(x) = x^2 - 1 \quad f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

(C_f) و (C_g) منحنيان f و g في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- أ- حدد D_f

ب- تحقق أن لكل x من D_f

2- بين أن (C_f) صورة المنحنى (C) ذا المعادلة $y = \frac{2}{x}$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(1;2)$

3- أنشئ (C_f) و (C_g)

4- حدد مبياناً عدد حلول المعادلة $x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

تمرين 12

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي معرفة بـ

$$f(x) = -x^2 + 3|x| - 2$$

(C_f) منحنى f في م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1- بين أن f زوجية

2- أ- ليكن x و y من \mathbb{R}^+ حيث $x \neq y$. أحسب معدل تغير الدالة f بين x و y

ب- أدرس رتبة f على كل من $[0;3[$ و $[3;+\infty[$ و أعط جدول تغيرات f على \mathbb{R}

3- أنشئ (C_f)