# المرجح

## القدرات المنتظرة

- استعمال المرجح في تبسيط تعبير متجهي؛
- إنشاء مرجح $n$ نقطة $(2 \le n \le 4)$؛
- استعمال المرجح لإثبات استقامية ثلاث نقط من المستوى؛
- استعمال المرجح في إثبات تقاطع المستقيمات؛
- استعمال المرجح في حل مسائل هندسية وفيزيائية.

## I- مرجح نقطتين

### 1- النقطة المتزنة

**تعريف**

لتكن $A$ نقطة من المستوى و $\alpha$ عددا حقيقيا
الزوج $(A;\alpha)$ يسمى نقطة متزنة. نقول كذلك النقطة $A$ معينة بالمعامل $\alpha$. أو العدد $\alpha$ وزن النقطة $A$.

### 2- مرجح نقطتين

**أنشطة**

I) لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين
1- بين أنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها
2- بين أنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ثم أنشئها

II) لتكن $A$ و $B$ نقطتين مختلفتين و $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين غير منعدمين
1- بين اذا كان $\alpha + \beta \neq 0$ فان توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
2- إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فانه لا توجد أية نقطة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

**مبرهنة و تعريف**

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ نقطتين متزنتين من المستوى حيث $\alpha + \beta \neq 0$.
توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
النقطة $G$ تسمى مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$

**ملاحظة**

إذا كان $\alpha + \beta = 0$ فان النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ لا تقبلان مرجحا.

### 3- مركز ثقل نقطتين

**تعريف**

مركز ثقل نقطتين $A$ و $B$ هو مرجح $A$ و $B$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل نقطتين $A$ و $B$ هو منتصف $[AB]$

### 4-الصمود

ليكن $k \in \mathbb{R}^*$

$G$ مرجح النقطتين المتزنتين $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ $\Leftrightarrow \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\quad \alpha + \beta \neq 0$

$\Leftrightarrow k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ $\quad k\alpha + k\beta \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $G$ مرجح النقطتين المتزنتين $(A;k\alpha)$ و $(B;k\beta)$

**خاصية**

مرجح نقطتين لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

تمرين

حدد $\alpha$ و $\beta$ حيث $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ في الحالتين
أ- $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = 5\overrightarrow{AB}$
ب- $A$ مركز ثقل $G$ و $B$.

## 5- الخاصة المميزة

نشاط

ليكن $\alpha$ و $\beta$ عددين حقيقيين حيث $\alpha+\beta\neq 0$

1- بين أن $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ $\forall M\in(P)$

2- ننسب المستوى $(P)$ إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

ب/ استنتج إحداثيتي $G$ علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

ج/ حدد إحداثيتي $G'$ مرجح مرجح $(A;-5)$ و $(B;2)$ حيث $A(-2;3)$ و $B(1;4)$

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$
تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

**نتيجة**

$\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان حيث $\alpha+\beta\neq 0$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{AB}$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ إذا و فقط إذا كان $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\overrightarrow{BA}$

**ملاحظة**

مرجح نقطتين مختلفتين $A$ و $B$ تنتمي إلى المستقيم $(AB)$

## 6- إحداثيتا مرجح نقطتين

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ . لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $G(x_G;y_G)$

إذا كان $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ فان $\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}\\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}\end{cases}$

تمرين

أنشئ $G$ مرجح $(A;-2)$ و $(B;3)$ ثم أنشئ $G'$ مرجح $(A;2)$ و $(B;1)$

أحسب $\overrightarrow{GG'}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$

تمرين

أنشئ $I$ مرجح $(A;2)$و $(C;1)$ ثم $J$ مرجح $(A;1)$و $(B;2)$ و $K$ مرجح $(C;1)$ و $(B;-4)$

1- أثبت أن $B$ مرجح $(C;1)$ و $(K;3)$

2- بين أن $J$ منتصف $[KI]$.

تمرين

لتكن $A\neq B$

1- حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=0$

2- حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\|$

تمرين حدد إحداثيتي $G$ مرجح $(A;-2)$ و $(B;6)$ حيث $A(-1;2)$ و $B(-4;3)$

## II- مرجح ثلاث نقط

### 1- أنشطة

نشاط1

لتكن $A$ و $B$ و $C$ ثلث نقط من المستوى

1- أنشئ $G$ حيث $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-5\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2- هل يمكن إنشاء $G$ حيث $\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

نشاط2

لتكن $A$ و $B$ و $C$ نقط مختلفة و $\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ أعداد حقيقية

نحدد $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ $(*)$

الجواب

لدينا $(*)$ تكافئ $(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$ فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\lambda}{(\alpha+\beta+\lambda)}\overrightarrow{AC}$

ومنه توجد نقطة وحيدة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

-* إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ فانه لا توجد نقطة $G$ حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

- إذا كان $\beta\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ فان جميع نقط المستوى تحقق $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

## 2- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ نقط متزنة من المستوى حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$.

توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

النقطة $G$ تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$

**ملاحظة**

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ لا تقبل مرجحا

## 3- مركز ثقل ثلاث نقط

**تعريف**

مركز ثقل ثلاث نقط $A$ و $B$ و $C$ هو مرجح $A$ و $B$ و $C$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل ثلاث نقط $A$ و $B$ و $C$ هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$

**خاصية**

متوسطات مثلث $ABC$ تتلاقى في نقطة وحيدة $G$ هي مركز ثقل المثلث $ABC$

و تحقق $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

اذا كان $A'$ و $B'$ و $C'$ منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي فان $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و

$\overrightarrow{BG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

## 4- خاصية

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

## 5- الخاصية المميزة

نشاط

$\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$

1- بين أن $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ تكافئ $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

2- ننسب المستوى $(P)$ إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

أ/ بين أن $\overrightarrow{OG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda}{\alpha+\beta+\lambda}\overrightarrow{OC}$

ب/ استنتج إحداثيتي $G$ علما أن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ و$\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

## 6- إحداثيتا مرجح ثلاث نقط

في مستوى منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ . لتكن $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ و $C(x_C;y_C)$ و
$G(x_G;y_G)$ إذا كان $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ فان $\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\lambda x_C}{\alpha+\beta+\lambda} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\lambda y_C}{\alpha+\beta+\lambda}\end{cases}$

## 7- خاصية التجميعية

$\alpha$ و $\beta$ و$\lambda$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda\neq 0$
$G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و$(C;\lambda)$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda)\overrightarrow{MG}$

* لو كان $\alpha+\beta\neq 0$ فان $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ تقبل مرجحا $G_1$ ومنه $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}$

وبالتالي $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG_1}+\lambda\overrightarrow{MC}=((\alpha+\beta)+\lambda)\overrightarrow{MG}$
إذن $G$ مرجح $(G_1;\alpha+\beta)$ و $(C;\lambda)$

* بنفس الطريقة نبين أن $G$ مرجح $(G_2;\alpha+\lambda)$ و $(B;\beta)$ حيث $G_2$ مرجح $(A;\alpha)$ و$(C;\lambda)$
* بنفس الطريقة نبين أن $G$ مرجح $(G_3;\beta+\lambda)$ و $(A;\alpha)$ حيث $G_2$ مرجح $(B;\beta)$ و$(C;\lambda)$

**خاصية**

مرجح ثلاث نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم.

تمرين

أنشئ $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$
أنشئ $G'$ مرجح $(A;-3)$ و $(B;2)$ و $(C;-1)$

تمرين

$ABC$ مثلث و $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;4)$ و $(C;-2)$ و $D$ نقطة حيث $\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{AB}$
أنشئ الشكل
بين أن $D$ و $C$ و $G$ مستقيمية

تمرين

$ABC$ مثلث. حدد مجموعة النقط $M$ حيث $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|$

# III- مرجح أربع نقط

## 1- مبرهنة و تعريف

لتكن $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و$(D;\mu)$ نقط متزنة من المستوى حيث
$\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$.
توجد نقطة وحيدة $G$ من المستوى حيث $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\lambda\overrightarrow{GC}+\mu\overrightarrow{GD}=\vec{0}$
النقطة $G$ تسمى مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$

ملاحظة

إذا كان $\alpha+\beta+\lambda+\mu=0$ فان النقط المتزنة $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ لا تقبل مرجحا

## 2- مركز ثقل أربع نقط

**تعريف**

مركز ثقل أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ هو مرجح $A$ و $B$ و $C$ و $D$ المعينين بنفس المعامل الغير المنعدم.

**خاصية**

مركز ثقل أربع نقط $A$ و $B$ و $C$ و $D$ هو مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;1)$ و $(D;1)$

**3- خاصية**

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا ضربنا وزنيهما في نفس العدد الغير المنعدم.

**4- الخاصية المميزة**

**مبرهنة**

$\alpha$ و $\beta$ و $\lambda$ و $\mu$ أعداد حقيقية حيث $\alpha+\beta+\lambda+\mu\neq 0$

تكون $G$ مرجح $(A;\alpha)$ و $(B;\beta)$ و $(C;\lambda)$ و $(D;\mu)$ إذا و فقط إذا كان لكل $M$ من المستوى

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\lambda\overrightarrow{MC}+\mu\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\lambda+\mu)\overrightarrow{MG}$

**5- خاصية التجميعية**

**خاصية**

مرجح أربع نقط لا يتغير إذا عوضنا نقطتين بمرجحهما معينا بمجموع معامليهما الغير المنعدم أو عوضنا ثلاث نقط بمرجحها معينا بمجموع معاملاتها.

تمرين

$ABCD$ متوازي الأضلاع

أنشئ $G$ مرجح $(A;1)$ و $(B;1)$ و $(C;2)$ و $(D;1)$

بين أن $G\in(AC)$