الهندسة الفضائية

التمرين 1 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر المستوى (P) والفلكة (S) حيث :

$(P): x-2y+2z-2=0$

و $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1. حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
2. بين أن المستوى (P) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .

التمرين 2 :

نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ المجموعة (S) حيث :

$$(S)=\left\{M\,(x,y,z)\in\mathcal{E}\,/\,x^2+y^2+z^2+4x-6z+4=0\right\}$$

1. بين أن (S) فلكة محددا مركزها Ω وشعاعها R .
2. ليكن (P) المستوى ذا المعادلة : $2x+y-2z+1=0$.
بين أن (P) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
3. ليكن (Q) المستوى المار من النقطة $A\left(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ و $\vec{u}\,(1,2,2)$ متجهة منظمية عليه .
أ - بين أن (P) و (Q) متعامدان .
ب- بين أن المتجهتين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{A\Omega}$ مستقيميتان .
جـ- بين أن الفلكة (S) والمستوى (Q) يتقاطعان وفق دائرة محددا مركزها ω وشعاعها r .

التمرين 3:

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
لتكن (S) مجموعة النقط $M\,(x,y,z)$ بحيث :

$x^2+y^2+z^2-4y+2z+2=0$

1. بين أن (S)فلكة مركزها $\Omega(0,2,-1)$ وشعاعها $r=\sqrt{3}$.
2. أ- تحقق من أن النقطة $A(-1,1,0)$ تنتمي إلى الفلكة (S) .
ب- أكتب معادلة المستوى (P) المماس للفلكة (S)في النقطة A .
3. أ- تحقق من أن : $x+y+z-2=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة $B(1,3,-2)$ و $\vec{n}(1,1,1)$ متجهة منظمية عليه .
ب- بين أن (Q) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة محددا مركزها وشعاعها

التمرين 4 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر (S) مجموعة النقط $M\,(x,y,z)$ بحيث :

$$x^2+y^2+z^2+x-\frac{1}{4}=0$$

1. تحقق من أن (S) فلكة محددا مركزها و شعاعها .
2. بين أن المستوى (P) ذا المعادلة : $y+z-1=0$ مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
3. نعتبر المستوى (Q) ذو المعادلة : $2x-y+z+1=0$.
أ- تحقق من أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .
ب- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (Q).
جـ- بين أن المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) وحدد نقطة تماسهما .
د- بين أن تقاطع (S) و (Q) دائرة (C) ؛ محدد مركزها وشعاعها.

التمرين 5 :

نعتبر في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ النقط : $A(1,2,-2)$ و $B(0,3,-3)$ و $C(1,1,-2)$ والمستوى (P) الذي معادلته : $x+y-3=0$.

1. أ- أحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى (P) .
ب- استنتج أن معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها $\Omega(0,1,-1)$ والمماسة للمستوى (P) هي : $x^2+y^2+z^2-2y+2z=0$.
2. أ- حدد $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.
ب- بين أن : $x-z-3=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
3. أ- تحقق من أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (ABC) .
ب- أحسب المسافة ΩC واستنتج نقطة تماس (S) و المستوى (ABC) .

التمرين 6 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم؛ نعتبر النقطة $A(2,0,2)$ و المستوى (P) ذا المعادلة :

$$x+y-z-3=0$$

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة A و العمودي على المستوى (P) .
2. حدد إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) .
3. نعتبر الفلكة (S) التي مركزها A والتي تقطع المستوى (P) وفق الدائرة التي مركزها B وشعاعها 2 .
أ- حدد شعاع الفلكة (S) .
ب- أكتب معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

التمرين 7 :

الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط :
$A(2,-1,1)$ و $B(2,3,-1)$ و $C(1,1,1)$.

1. أ- بين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$.
ب- استنتج مسافة النقطة A عن المستقيم (BC) .
2. ليكن H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) .
بين أن $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ هو مثلوث إحداثيات H .
(يمكن استعمال تمثيل بارامتري للمستقيم (BC)) .
3. حدد معادلة ديكارتية للفلكة التي أحد أقطارها $[AH]$.
4. أحسب مساحة المثلث ABC .

التمرين 8 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛ نعتبر النقط $A\,(-1,2,-1)$ و $B\,(1,0,0)$ و $C\,(2,1,0)$.

1. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{A\Omega}\wedge\overrightarrow{AB}$.
ب- أحسب مساحة المثلث ΩAB .
جـ- استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ΩAB) .
2. أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB) .
3. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ الفلكة (S) التي معادلتها :
$x^2+y^2+z^2-4x-2y-1=0$.
أ- حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
ب- حدد تقاطع الفلكة (S) و المستوى (ΩAB) .

جـ- بين أن المستقيم (AB) يقطع الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين I و J ينبغي تحديدهما .

التمرين 9 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛
نعتبر النقط $A(1,1,-1)$ و $B(2,0,1)$ و $C(3,1,1)$.

1. حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (AB) .
2. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ ؛ ثم استنتج مسافة النقطة C عن المستقيم (AB) .
ب- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من النقطة O والموازي للمستوى (ABC) .
3. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ الفلكة (S) التي معادلتها :
$$x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+9=0$$
أ- حدد مركز وشعاع الفلكة (S) .
ب- بين أن المستقيم (AB) مماس للفلكة (S) ثم حدد نقطة تماسهما.
جـ- بين أن المستوى (Q) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة محددا مركزها وشعاعها .

التمرين 10 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛
نعتبر النقط $A(-3,0,0)$ و $B(-1,0,-1)$ و $C(-1,1,0)$ و $\Omega(1,-1,0)$.

1. أ- حدد مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
ب- استنتج أن $x-2y+2z+3=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها Ω وشعاعها 2 .
ب- بين أن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) .
3. ليكن (Q) المستوى المعرف بالمعادلة : $2x+2y+z+3=0$.
أ- بين أن المستويين (ABC) و (Q) متعامدان .
ب- بين أن المستوى (Q) والفلكة (S) يتقاطعان وفق دائرة $(\mathcal{C})$.
جـ- أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم المار من النقطة Ω والعمودي على (Q) .
د- حدد مركز وشعاع الدائرة $(\mathcal{C})$.

التمرين 11 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛
نعتبر النقط :
$A\left(\frac{5}{2},0,0\right)$ و $B(0,5,0)$ و $C\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$ و $\Omega\left(\frac{5}{8},\frac{5}{8},\frac{5}{8}\right)$.

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (P) المار من النقط A و B و C .
2. أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) العمودي على المستوى (P) و المار من النقطة Ω .
3. أ- أحسب : $\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|$.
ب- ما هي مساحة رباعي الأوجه $(OABC)$ ؟
4. أحسب المسافة بين النقطة Ω و المستوى (P) .
5. لتكن (S) الفلكة ذات المعادلة :
$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{4}(x+y+z)+\frac{25}{32}=0$$
أ- حدد شعاع ومركز الفلكة (S) .
ب- بين أن الفلكة (S) مماسة لكل من المستويات : (ABC) و (OAB) و (OBC) و (OCA) .
6. حدد مثلوث إحداثيات نقطة تماس الفلكة (S) والمستوى (P) .

التمرين 12 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛
نعتبر النقط :
$A(1,0,0)$ و $B(0,2,0)$ و $C(0,0,2)$ و $\Omega\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ و O' المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (ABC) .

1. أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .
2. أوجد تمثيلا بارامتريا للمستقيم $(\Omega O')$.
3. حدد مثلوث إحداثيات النقطة O' .
4. نعتبر الفلكة S_λ التي مركزها Ω وشعاعها λ حيث λ عدد حقيقي موجب قطعا .
أ- أعط معادلة ديكارتية للفلكة S_λ .
ب- أوجد قيمة λ بحيث يكون المستوى (ABC) مماسا للفلكة S_λ .
جـ- أوجد قيمة λ بحيث يكون تقاطع S_λ و (ABC) هو الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين 13 :

في الفضاء $\mathcal{E}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ؛
نعتبر رباعي الأوجه $ABCD$.

1. أذكر S : صيغة مساحة المثلث ABC .
2. تحقق من أن مسافة النقطة D عن المستوى (ABC) هي :
$$d(D,(ABC))=\frac{\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}$$
3. استنتج أن حجم رباعي الأوجه $ABCD$ هو :
$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}\right|$$
4. نعتبر في $\mathcal{E}$ ؛ رباعي الأوجه $ABCD$ بحيث :
$A(-1,-1,2)$ و $B(2,-1,1)$ و $C(-1,2,1)$ و $D(1,1,1)$
أحسب حجم رباعي الأوجه $ABCD$.