# عموميات حول الدوال العددية

## السنة الأولى علوم تجريبية و علوم رياضية

■ **تذكير : إشارة دالة تآلفية و ثلاثية الحدود و طريقة المميز المختصر**

## I- زوجية دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين01:**

أدرس زوجية الدالة العددية $f$ في الحالات التالية:

$$(1): f(x)=x^2+\frac{1}{x^3}$$

$$(2): f(x)=x^3-\frac{1}{x^3} \quad \text{و} \quad (3): f(x)=x^3-\frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad (4): f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$(5): f(x)=3.x+|x-2|-|x+2| \quad \text{و} \quad (6): f(x)=2.x^2-|x+3|-|x-3|$$

$$(7): f(x)=\sqrt{\frac{x^2}{x^2-9}} \quad \text{و} \quad (8): f(x)=\frac{x^3}{x^2-2.|x|+3} \quad \text{و} \quad (9): f(x)=\sqrt{x^2-2.|x|+3}$$

■ **تمرين02:**

لتكن $f$ دالة زوجية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $f(x)=3-2x$ لكل $x$ من $\mathbb{R}^+$ ،

**أ-** أنشيء $(\zeta_f)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**ب-** أحسب $f(x)$ بدلالة $x$ لكل $x$ من $\mathbb{R}^-$ .

■ **تمرين03:**

لتكن $g$ دالة فردية معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x)=\begin{cases}-2x\,;-1\le x\le 0\\ x+3;x\le -1\end{cases}$ ،

**أ-** أنشيء $(\zeta_g)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**ب-** أحسب $g(x)$ بدلالة $x$ لكل $x$ من $\mathbb{R}^+$ .

■ **2)- ملخص :**

■ **تعريف :** لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ ،

- نقول أن $f$ دالة زوجية إذا كان : لكل $x$ من $D_f$ $-x\in D_f$ و $f(-x)=f(x)$ .

- نقول أن $f$ دالة فردية إذا كان : لكل $x$ من $D_f$ $-x \in D_f$ و $f(-x) = -f(x)$ .

■ **ملحوظة :**

- إذا كانت $f$ دالة فردية و كان $0 \in D_f$ فإن : $f(0) = 0$ .

■ **خاصية01:** ليكن $(\zeta_f)$ منحنى دالة عددية $f$ في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ،

- تكون $f$ دالة زوجية إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب $(Oy)$ .

- تكون $f$ دالة فردية إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ متماثلا بالنسبة للنقطة $O$ أصل المعلم .

## II- مقارنة دالتين عدديتين :

### ■ 1)- الدالة الموجبة و الدالة السالبة :

■ **تقديم :** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x) = -x^3 + 2x + 1$ ،

حدد جذرا بديهيا للحدودية $f$ ثم أنشي جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ .

■ **تعريف :**

- نقول إن دالة عددية $f$ موجبة قطعا على جزء $D$ من $D_f$ و نكتب $f \succ 0$ على $D$

إذا كان : $f(x) \succ 0$ لكل $x$ من $D_f$ .

- نقول إن دالة عددية $f$ سالبة قطعا على جزء $D$ من $D_f$ و نكتب $f \prec 0$ على $D$

إذا كان : $f(x) \prec 0$ لكل $x$ من $D_f$ .

■ **خاصية02:** ليكن $(\zeta_f)$ منحنى دالة عددية $f$ في معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ،

- تكون $f$ موجبة على $D_f$ إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ فوق محور الأفاصيل $(Ox)$ .

- تكون $f$ سالبة على $D_f$ إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ تحت محور الأفاصيل $(Ox)$ .

■ **تمرين04:**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{-x^2 + x + 6}$ ،

أ- حدد $D_f$ ثم أنشيء جدولا تحدد فيه إشارة $f(x)$ لكل $x$ من $D_f$ .

ب- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $(I) : \dfrac{4x^2 - 12x + 5}{-2x^2 + x + 3} \leq 0$ .

### ■ 2)- مقارنة دالتين :

■ **تعريف :** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين مجموعة تعريفهما $D_f$ و $D_g$ على التوالي

$D \subseteq D_f \cap D_g$ ، و

- نقول إن $f$ أصغر من أو تساوي $g$ على $D$ و نكتب $f \leq g$ على $D$ إذا كان :

$(f-g) \leq 0$ على $D$ .

- نقول إن $f$ أصغر قطعا من $g$ على $D$ و نكتب $f \prec g$ على $D$ إذا كان :

$(f-g) \leq 0$ على $D$ .

■ **مثال :** قارن الدالتين العدديتين $f$ و $g$ في الحالات التالية :

$$(1):\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ g(x) = -x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad (2):\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \\ g(x) = x + 1 \end{cases}$$

■ **تمرين05:**

نعتبر العددين الحقيقيين : $A = \dfrac{1,0000004}{(1,0000006)^2}$ و $B = \dfrac{(0,9999995)^2}{0,9999998}$ ،

والدالتين العدديتين : $f : x \mapsto \dfrac{1+4.x}{(1+6.x)^2}$ و $g : x \mapsto \dfrac{(1-5.x)^2}{1-2.x}$ .

**أ-** حدد $D = D_f \cap D_g$ ، ثم قارن على $D$ الدالتين العدديتين $f$ و $g$ .

**ب-** أحسب $f\left(10^{-7}\right)$ و $g\left(10^{-7}\right)$ ، ثم قارن العددين $A$ و $B$ .

■ **خاصية03:** $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجموعة $D$ و $(\zeta_f)$ و $(\zeta_g)$ منحناهما على التوالي في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ،

- تكون $f$ أصغر من أو تساوي $g$ على $D$ إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ تحت $(\zeta_g)$ .

■ **تمرين06:**

حدد وضع منحنى الدالة $f : x \to \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ بالنسبة للمستقيم $(D) : y = \dfrac{x}{2}$ .

■ **3)- الدالة المكبورة والدالة المصغورة :**

■ **تقديم :**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{3}x}{x^2 + 1}$ ،

**أ-** بين أن $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{3}{2}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ .

**ب-** أول هندسيا النتيجة السابقة .

■ **تعريف :** لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ ، و $M$ و $m$ عددين حقيقيين .

- نقول إن الدالة $f$ مكبورة بالعدد $M$ إذا كان $f(x) \leq M$ لكل $x$ من $D_f$ .

- و نقول إن الدالة $f$ مصغورة بالعدد $m$ إذا كان $f(x) \geq m$ لكل $x$ من $D_f$ .

- نقول إن $f$ دالة محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة .

■ **ملحوظة :**

الدوال الموجبة مصغورة بالعدد $0$ و الدوال السالبة مكبورة بالعدد $0$ .

■ **خاصية04:**

تكون دالة عددية $f$ محدودة إذا و فقط إذا وجد $\alpha$ من $]0,+\infty[$ بحيث :

$|f(x)| \leq \alpha$ لكل $x$ من $D_f$ .

■ **خاصية05:** ليكن $(\zeta_f)$ منحنى دالة عددية $f$ في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ ،

- تكون الدالة $f$ مكبورة بالعدد $M$ إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ تحت المستقيم $(D): y = M$ .

- تكون الدالة $f$ مصغورة بالعدد $m$ إذا و فقط إذا كان $(\zeta_f)$ فوق المستقيم $(D'): y = m$ .

■ **تمرين07:** نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ و $g(x) = \frac{x^2-4x}{x^2+4}$ .

**أ-** بين أن $|f(x)| \leq \frac{1}{4}$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ، ثم أول هندسيا هذه النتيجة .

**ب-** بين أن $g$ دالة محدودة و استنتج أن منحناها محصور بين مستقيمين موازيين لمحور الأفاصيل .

## III- مطارف دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين08:** بين أن الدالة : $f : x \to -x^2+x+6$ تقبل قيمة قصوى مطلقة يتم تحديدها

و الدالة : $g : x \to 4x^2-12x+5$ تقبل قيمة دنيا مطلقة .

■ **تمرين09:** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=\begin{cases}1-x\,;x\le -1\\ x+3;-1\le x\le 2\\ 2x+9;x\ge 2\end{cases}$$

أنشيء $(\zeta_f)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، ثم حدد مطارف $f$ و طبيعتها .

■ **2)- ملخص :**

■ **تعريف :** لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ و $x_0$ عنصر من $D_f$ .

- نقول إن $f$ تقبل عند $x_0$ أقصى نسبي إذا وجد مجال مفتوح $I$ بحيث $x_0\in I$

و $f(x)\le f(x_0)$ لكل $x$ من $I$ .

- نقول إن $f$ تقبل عند $x_0$ أدنى نسبي إذا وجد مجال مفتوح $I$ بحيث $x_0\in I$

و $f(x)\ge f(x_0)$ لكل $x$ من $I$ .

## IV- رتابة دالة عددية :

■ **1)- أنشطة :**

■ **تمرين10:** نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-3|x|$ .

**أ-** أحسب معدل تغير $f$ على $\mathbb{R}^+$ ثم أدرس رتابها على هذا المجال .

**ب-** إستنتج رتابة $f$ على $\mathbb{R}^-$ ثم اعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ .

**ج-** حدد مطارف الدالة $f$ و طبيعتها .

■ **تمرين11:** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x)=x(3-|x|)$ .

**أ-** بين أن $g$ دالة فردية ثم أدرس رتابتها على $\mathbb{R}^+$ .

**ب-** إستنتج رتابة $g$ على $\mathbb{R}^-$ ثم اعط جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ .

**ج-** حدد مطارف الدالة $g$ و طبيعتها .

■ **2)- ملخص :**

■ **الرتابة و معدل التغير :**

لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ و $I$ مجال ضمن $D_f$ ،

- تكون الدالة $f$ تزايدية على $I$ إذا و فقط إذا كان :

لكل $x$ و $y$ من $I$ بحيث $x\neq y$ . $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\succ 0$

- تكون الدالة $f$ تزايدية على $I$ إذا و فقط إذا كان :

لكل $x$ و $y$ من $I$ بحيث $x \neq y$ . $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \prec 0$

■ **أمثلة :** - **رتابة** $ax^2+bx+c$ **حيث** $a \in \mathbb{R}^*$ :

- **رتابة** $\frac{ax+b}{cx+d}$ **حيث** $c \in \mathbb{R}^*$ :

## V- دراسة دوال إعتيادية :

### ■ 1)- دراسة حدوديات من الدرجة الثانية و دوال متخاطة :

■ **تمرين12:**

نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بما يلي :

$f(x)=-x^2-2x+3$ و $g(x)=\frac{-x+1}{x+1}$ .

**أ-** حدد أفاصيل نقط تقاطع $(\zeta_f)$ و $(\zeta_g)$ .

**ب-** أرسم $(\zeta_f)$ و $(\zeta_g)$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

**ج-** حل مبيانيا في المجموعة $\mathbb{R}$ المتراجحة $(I):\frac{x^3+3x^2-2x-2}{x+1} \geq 0$ .

### ■ 3)- دراسة دوال من نوع $f:x \to ax^3$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ :

### ■ 4)- دراسة دوال من نوع $f:x \to \sqrt{x-a}$ حيث $a \in \mathbb{R}$ :

### ■ 5)- صورة مجال بدالة عددية :

■ **تعريف :** لتكن $f$ دالة عددية مجموعة تعريفها $D_f$ و $I$ مجال ضمن $D_f$ ،

نسمي صورة المجال $I$ بالدالة $f$ المجموعة $\{f(x)/x \in I\}$ و يرمز لها بالرمز $f(I)$

إذن $f(I)=\{f(x)/x \in I\}$ .

■ **أمثلة :** لنحدد صور المجالات $I=[1,3]$ و $J=[-1,1]$ و $K=[0,2]$ بالدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2-2x$ .

■ **تمرين13:** حدد صور المجالات $I=[-4,-3[$ و $J=]0,4]$ و $K=\left]-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right[$ بالدالة العددية $g$ المعرفة بما يلي : $g(x)=\frac{x}{x+2}$ .

## VI- رتابة مركب دالتين عدديتين :

### ■ 1)- مركب دالتين عدديتين :

■ **تعريف :** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجالين $I$ و $J$ على التوالي بحيث $f(I)\subseteq J$ ،

مركب الدالتين $f$ و $g$ في هذا الترتيب هي الدالة $h$ المعرفة على $I$ بما يلي :

$h(x)=g(f(x))$ لكل $x$ من $I$ ، يرمز للدالة $h$ بالرمز $gof$

إذن : $gof : \begin{vmatrix} I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \to f(x) \to g(f(x)) \end{vmatrix}$ .

■ **مثال :** نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x)=x^2+2x$ و $g(x)=x^2-2x$ .

حدد $gof$ و $fog$ ثم قارنهما و حدد أيضا $fof$ و $gog$ .

■ **ملحوظة :** بصفة عامة $gof \neq fog$ هذا يعني أن تركيب الدوال عملية غير تبادلية .

- **بصفة عامة :** إذا كانت $f$ و $g$ دالتين عدديتين مجموعة تعريفهما على التوالي $D_f$ و $D_g$

فإن : $D_{gof}=\{x\in D_f / f(x)\in D_g\}$

و لدينا : $gof : \begin{vmatrix} D_{gof} \xrightarrow{f} D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ x \to f(x) \to g(f(x)) \end{vmatrix}$ .

■ **مثال :** نعتبر الدالتين العدديتين $f$ و $g$ المعرفتين بما يلي :

$f(x)=x^2+x$ و $g(x)=\sqrt{x-6}$

حدد $D_{gof}$ و $D_{fog}$ ثم أوجد صيغتي $gof$ و $fog$ .

■ **2)- رتابة مركب دالتين :**

■ **خاصية06:** لتكن $f$ و $g$ دالتين عدديتين معرفتين على مجالين $I$ و $J$ على التوالي بحيث $f(I)\subseteq J$ ،

- إذا كانت للدالتين $f$ و $g$ نفس الرتابة على المجالين $I$ و $J$ على التوالي فإن الدالة $gof$ تكون تزايدية على $I$ .

- إذا كانت للدالتين $f$ و $g$ رتابة مختلفة على المجالين $I$ و $J$ على التوالي فإن الدالة $gof$ تكون تناقصية على $I$ .

■ **تمرين14:** نعتبر الدالتين $f$ و $h$ بحيث $f(x)=\frac{1}{x}$ و $h(x)=\frac{4x-1}{x^2}$ .

abouzakariya@yahoo.fr

| |
|---|
| **أ-** حدد حدودية $g$ من الدرجة الثانية تحقق : $g\,of = h$ .<br>**ب-** إستنتج رتابة الدالة $h$ على المجالات $]-\infty,0[$ و $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ و $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ثم اعط جدول تغيراتها . |
| |