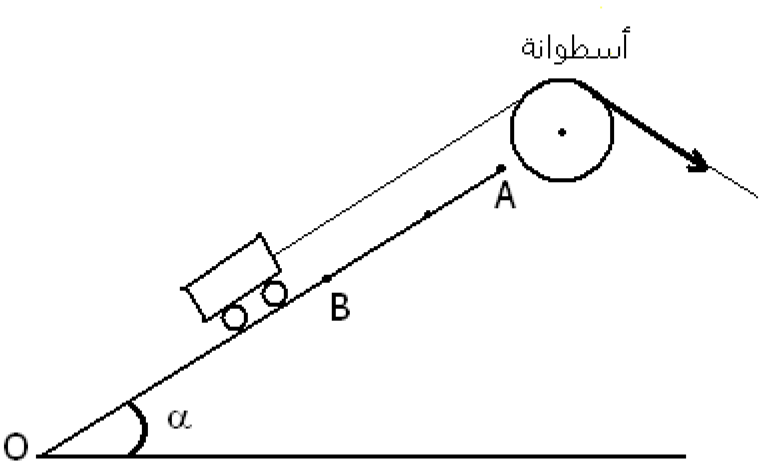
تصحيح تمارين حول حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

تمرين 1



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g=9{,}8m/s^2$

يتم جر عربة بواسطة خيط غير قابل الامتداد وذي كتلة مهملة ملفوف حول أسطوانة كتلتها $m_C=250g$ وشعاعها $r=6cm$.

الأسطوانة تدور حول محورها الأفقي بواسطة محرك يطبق عليه مزدوجة ذات عزم ثابت $\mathcal{M}$.

العربة توجد فوق مستوى مائل بالزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للخط الأفقي طوله $OA=2m$. كتلة العربة هي $m_S=400g$.

1 ــ أحسب شدة قوة الجر لمنح العربة تسارعا $a=0{,}5m/s$

2 ــ أكتب المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة علما أن سرعته البدئية منعدمة عند أصل المعلم $\mathcal{R}$.

3 ــ على أي مسافة OB من النقطة O يجب حذف قوة الجر لكي تصير سرعة G منعدمة عند النقطة A ؟

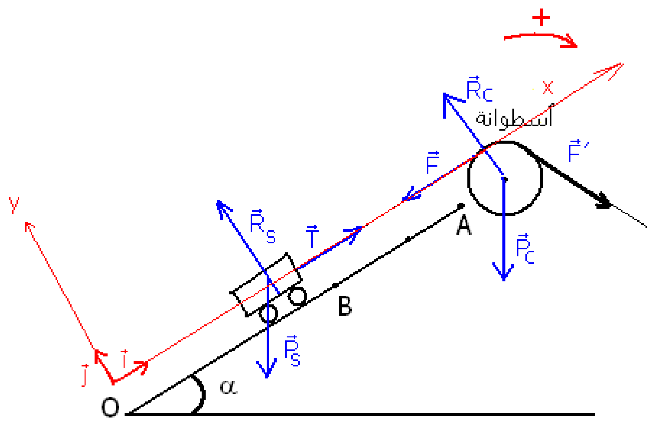
4 ــ أحسب J_Δ عزم قصور الأسطوانة ، واستنتج قيمة $\mathcal{M}$.

الجواب :

1 ــ حساب قوة الجر T :

نختار جسم مرجعي مرتبط بالأرض ومعلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ محوره $(O,\vec{i})$ مواز للمستوى المائل وموجه في نفس منحى حركة العربة و $(O,\vec{j})$ عمودي على المستوى المائل وموجه نحو الأعلى .

أنظر الشكل



دراسة حركة العربة S :

القوى المطبقة على العربة (S) كمجموعة مدروسة : $\vec{P}_S,\vec{R}_S,\vec{T}$

حسب القانون الثاني لنيوتن لدينا

$$\vec{P}_S+\vec{R}_S+\vec{T}=m_S\vec{a}_G$$

نسقط العلاقة على المحور $(O,\vec{i})$ فنجد :

$$P_{Sx}+R_{Sx}+T_x=m_S.a \qquad (a_x=a)$$

$$-m_S g\sin\alpha+T=m_S.a$$

تمكن هذه العلاقة من حساب شدة توتر الخيط T بحيث أن

$$T=m_s a+m_S g\sin\alpha$$

$$T=m_S(a+g\sin\alpha)$$

تطبيق عددي : $T=2{,}16N$

2 ــ المعادلة الزمنية لحركة G مركز قصور العربة باعتبار أن السرعة البدئية منعدمة عند أصل المعلم :

بما ن التسارع ثابت إذن فحركة مركز قصور العربة مستقيمية متغيرة بانتظام معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$ عند أصل المعلم (t=0) لدينا $x_0 = 0$ و $v_0 = 0$ وبالتالي فإن المعادلة الزمنية هي

$x = 0,25t^2$

3 ـ المسافة OB التي يجب عندها حذف قوة الجر لكي يصل إلى النقطة A بسرعة منعدمة :

نقسم مسار العربة إلى مرحلتين :

المرحلة الأولى وهي OB حيث أن حركة العربة حركة مستقيمية متغيرة بانتظام : $x = 0,25t^2$ و $v = 0,5t$

عند النقطة B تكون سرعة العربة هي : $v_B = 5t_B$ بحيث أن

$$t_B = \frac{v_B}{0,5} \Rightarrow x_B = OB = 0,25 \times \left(\frac{v_B}{0,5}\right)^2$$

$$v_B^2 = \frac{(0,5)^2}{0,25} \times OB \Rightarrow v_B^2 = OB$$

المرحلة الثانية هي عندما تقطع العربة المسافة BA ، نطبق مبرهنة الطاقة الحركية :

$$\frac{1}{2}m_S v_A^2 - \frac{1}{2}m_S v_B^2 = \underset{B\to A}{W}(\vec{P}_S) + \underset{B\to A}{W}(\vec{R}_S)$$

لدينا حسب المعطيان أن العربة ستتوقف في النقطة A أي أن $v_A = 0$ وأن $\vec{R}_S$ عمودية على متجهة الانتقال أي أن شغلها منعدم . وبالتالي :

$$-\frac{1}{2}m_S v_B^2 = \underset{B\to A}{W}(\vec{P}_S) \Rightarrow v_B^2 = 2gBA\, sin\,\alpha$$

$$OB = 2g(-OB + OA)\, sin\,\alpha$$

$$OB(1 + 2g\, sin\,\alpha) = 2gOA\, sin\,\alpha \Rightarrow OB = \frac{2gOA\, sin\,\alpha}{(1 + 2g\, sin\,\alpha)} = 1,82m$$

4 ـ عزم قصور الأسطوانة هو :

$$J_\Delta = \frac{1}{2}m_C r^2 = 4,5.10^{-4}kg.m^2$$

لنستنتج قيمة $\mathcal{M}$:

دراسة حركة اللأسطوانة C :

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على الأسطوانة :

القوى المطبقة على الأسطوانة هي :

$$\vec{T}' \text{ ، } \vec{P}_C, \vec{R}_C, \mathcal{M}(\vec{F}, \vec{F}')$$

$\mathcal{M}_\Delta = J_\Delta.\ddot{\theta}$ بحيث أن $a = r\ddot{\theta}$ لكون أن الخيط غير قابل الامتداد وكتلته مهملة . أي أن $\frac{a}{r} = \ddot{\theta}$ وبالتالي فإن

$$\mathcal{M}_\Delta = J_\Delta.\frac{a}{r} + T'.r = 0,13N.m$$

تمرين 2

نعتبر قرصا في دوران حول محور ثابت Δ ورأسي . عزم قصور القرص $J_\Delta = 6.10^{-2}\,kg.m^2$

1 ـ يمثل المنحنى جانبه مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد r=0,1m من المحور Δ .

1 ـ 1 ما هي طبيعة حركة M ؟ علل الجواب

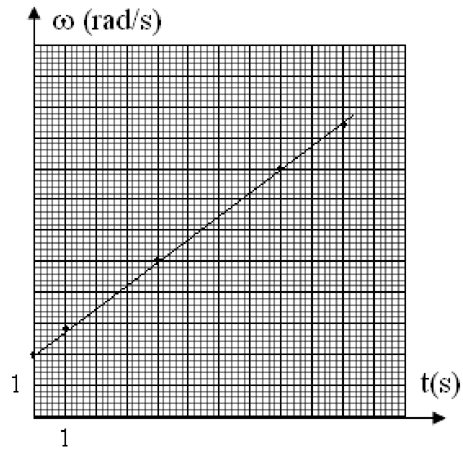
1 ـ 2 حدد قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ واكتب معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta} = f(t)$

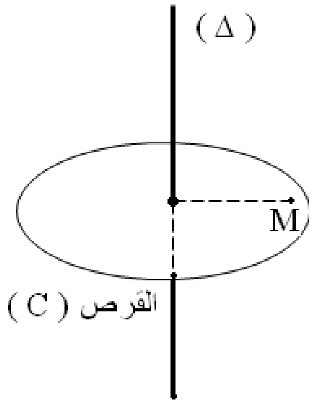
2 ـ علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

2 ـ 1 اكتب المعادلة الزمنية للحركة $\theta = f(t)$

2 ـ 2 احسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين $t_1 = 4,0s$ و $t_2 = 5,2s$

2 ــ 3 نعتبر اللحظة ذات التاريخ t=2s . احسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي a_t والتسارع ألمنظمي a_n للنقطة M واستنتج منظم التسارع $\ddot{\theta}$.
3 ــ احسب مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ .





الأجوبة :
1 ــ 1 طبيعة حركة M : من خلال الشكل يلاحظ أن السرعة الزاوية دالة خطية بالنسبة للزمن إذن فحركة النقطة M حركة دائرية متغيرة بانتظام
1 ــ2 قيمة التسارع الزاوي

$$\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0{,}75 rad / s^2$$

$$\omega(t) = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$$

$$\omega(t) = 0{,}75t + 2 \quad (rad/s)$$

2 ــ 1 المعادلة الزمنية للحركة M $\theta(t) = 0{,}375t^2 + 2t \quad (rad)$
2 ــ2 عدد الدورات القرص بين اللحظتين t_1 وt_2

$n = \dfrac{\omega_2^{\,2} - \omega_1^{\,2}}{4\pi(t_2 - t_1)}$ أي أن $n = 1$

2 ــ 3 قيمتي التسارع المماس والتسارع ألمنظمي

$$a_t = r\ddot{\theta} \Rightarrow a_t = 75.10^{-3} rad / s^2$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2 \Rightarrow a_n = 1{,}225 rad / s^2$$

منظم متجهة التسارع هو

$$a = \sqrt{a_n^{\,2} + a_t^{\,2}}$$

$$a = 1{,}227 rad / s^2$$

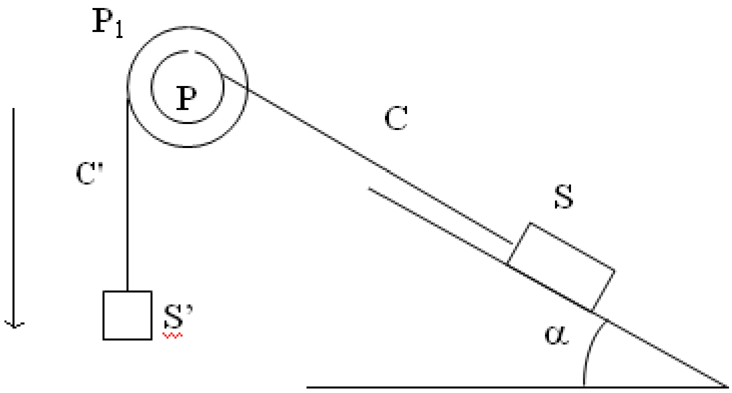
3 ــ مجموع عزم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور Δ

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \ddot{\theta}$$

$$= 45.10^{-3} N.m$$

تمرين3
ينزلق جسم (S) كتلته m = 70 kg على طول خط أكبر ميل لمستوى مائل بزاوية α = 30° بالنسبة للمستوى الأفقي . نجر الجسم بواسطة حبل (C) . خلال حركة جسم (S) على المستوى المائل يطبق هذا

الأخير قوى الاحتكاكات تكافئ قوة $\vec{f}$ موازية للمستوى ومنحاها عكس منحى الحركة وشدتها $\frac{1}{10}$ وزن الجسم $(\|\vec{f}\|=\frac{1}{10}\|\vec{P}\|)$



1- خلال المرحلة الأولى, يطبق الحبل على الجسم قوة ثابتة $\vec{F}$ موازية للمستوى المائل , بحيث ينطلق الجسم بدون سرعة بدئية من النقطة A ليصل إلى النقطة B التي تبعد عنها بمسافة 5m بسرعة $v_B=5m/s$.

خلال المرحلة الثانية وعند النقطة B ، تأخذ القوة $\vec{F}$ قيمة جديدة بحيث تصبح حركة (S) منتظمة على طول المسافة BD حيث BD=25m .

- أحسب خلال كل مرحلة شدة القوة $\vec{F}$.

2- بعد أن قطع الجسم 30 m , ينقطع الحبل . ما هي طبيعة حركة الجسم ؟ أستنتج المدة الزمنية التي استغرقها منذ انطلاقه من النقطة A إلى حين رجوعه منها .

3- للقيام بهذه التجارب نستعمل الجهاز التالي :

الحبل ملفوف على أسطوانة P . شعاعها R = 25cm أسطوانة ثانية P_1 مثبتة على ألأسطوانة الأولىP وشعاعها R_1= 50cm ، لهما نفس المحور(Δ) .

نلف حبل آخر C′ حيث تبث في طرفه الحر جسما (S′) له حركة رأسية ويقوم بجر المجموعة نحو الأسفل .

عزم قصور المجموعة (P_1 ,P) $J_\Delta=1.375kg.m^2$

باعتمادك على المرحلتين اللتين تمت الإشارة إليهما في السؤال (1) . أحسب خلال كل مرحلة :

أ- المسافة المقطوعة من طرف S′ .

ب- توتر الحبل C′ .

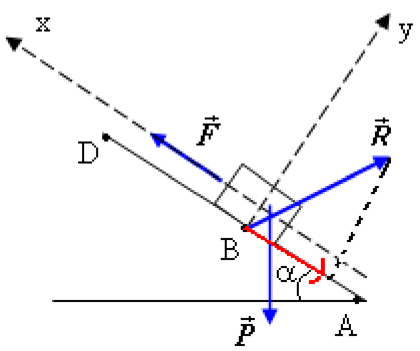
ج- قيمة الكتلة m_1

وأكتب المعادلة الزمنية لحركة (S′) خلال كل مرحلة .

4- أوجد السرعة الزاوية $\dot{\theta}$ للأسطوانة عند انقطاع الحبل C و كذلك أوجد السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S′ عند اللحظة التي يمر فيها الجسم S من النقطة A .

الجواب :

1 ـ في المرحلة الأولى :



نطبق مبرهنة الطاقة الحركية في المرحلة الأولى :

$$\frac{1}{2}mv_B^2=F.\ell-\frac{mg}{10}\ell-mg\ell\sin\alpha$$

$$F=\frac{mv_B^2}{2\ell}+\frac{mg}{10}+mg\sin\alpha$$

$$F=595N$$

المرحلة الثانية a=0 حسب مبدأ القصور ؛

$$\sum\vec{F}_{ext}=\vec{0}\Rightarrow\vec{F}+\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}$$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{i})$

$\boldsymbol{F=mg\sin\alpha+\frac{mg}{10}}$ تطبيق عددي $\boldsymbol{F=420N}$

2 ـ عند انقطاع الحبل :

نطبق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}'$

الاسقاط على $(O,\vec{i})$ $a'=-g(\sin\alpha+\frac{1}{10})\Rightarrow a'=-6m/s^2$

طبيعة الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام

المدة الزمنية المستغرقة مند انطلاق الجسم من النقطة A إلى حين الرجوع إليها .

$t=t_1+t_2+t_3+t_4$

t_1 المدة المستغرقة لقطع المسافة AB $\Delta V=a.\Delta t\Rightarrow\Delta t=\frac{\Delta V}{a}=t_1$

إذن $t_1=2s$

المدة الزمنية المستغرقة خلال المرحلة التي انقطع فيها الحبل : $\Delta x=V_Bt_2\Rightarrow t_2=\frac{BD}{V_B}=5s$

t_3 المدة الزمنية التي سيستغرقها الجسم بعد انقطاع الحبل إلى أن يتوقف ثم ينزلق على المستوى المائل .

بما أن الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام وهي متباطئة ،

$\Delta v=a'\Delta t\Rightarrow\Delta t=-\frac{v_B}{a'}=0,83s$

والمسافة التي يقطعها الجسم هي : $DE=\frac{1}{2}a't^2+v_Bt=2,08m$

المدة الزمنية المستغرقة خلال مرحلة الرجوع

حساب التسارع :

$mg\sin\alpha-\frac{mg}{10}=ma''\Rightarrow a''=g(\sin\alpha-0,1)=3,92m/s^2$

نعتبر أن أصل المعلم هو E وأصل التواريخ كذلك : $EA=\frac{1}{2}a''t^2\Rightarrow t_4=\sqrt{\frac{2EA}{a''}}=4,04s$

إذن $t=11,87s$

3 ـ الدراسة التحريسة

<u>حساب المسافة المقطوعة خلال المرحلتين السابقتين</u> :

العلاقة بين x وz بحيث أن x موضع الجسم في لحظة t وz موضع الجسم S′ في نفس اللحظة t

نعتبر أنه في نفس اللحظة t أن الأفصول الزاوي للأسطوانة هو θ . نعتبر أن الحبل غير قابل الانزلاق على الأسطوانة $x=R\theta$ و $z=R_1\theta$ أي أن $\frac{x}{R}=\frac{z}{R_1}$ وبما أن $R_1=2R$ نستنتج من هذه العلاقة $z=2x$

* في المرحلة الأولى x=AB وبما أن AB=5m فإن z=10m
* في المرحلة الثانية x=BD وBD=25m فإن z=50m

<u>حساب التوتر T_1</u>

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S لحساب التسارع في المرحلة الأولى نستعمل معطيات السؤال (1) :

$\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}=m\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$F-mg\sin\alpha-f=ma\Rightarrow a=\frac{F-mg\sin\alpha-f}{m}$

$a=2,5m/s^2$

دراسة المجموعة في الحالة الجديدية :

نطبق القانون الثاني لنيوتن في الحالة الجديدة على الجسم (S):

$$\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\vec{a}$$

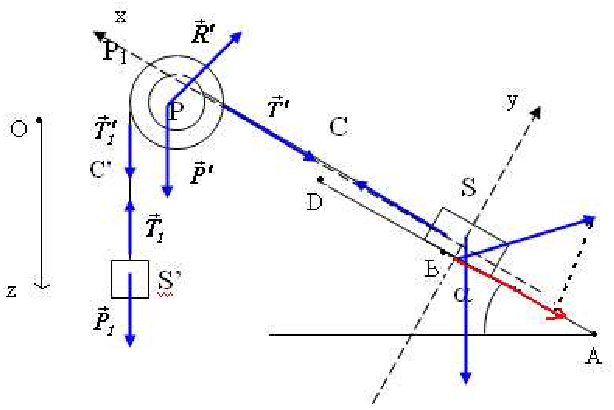
إسقاط العلاقة على $(O,\vec{i})$ $\quad T=mg\sin\alpha+\dfrac{mg}{10}+ma \quad (1)$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة $T_1R_1-TR=J_\Delta\ddot{\theta} \quad (2)$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على S′ $\quad T_1=m_1(g-a_1) \quad (3)$

من العلاقة (1) والعلاقة (2) نستنتج

$$T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+T\frac{R}{R_1} \quad et \quad T=F\Rightarrow T_1=\frac{J_\Delta a}{R.R_1}+F\frac{R}{R_1}$$



في المرحلة الأولى : T_1=325N

في المرحلة الثانية a=0 T_1=210N

حساب الكتلة في المرحلتين : نطبق العلاقة (3)

$$T_1=m_1(g-a_1)$$

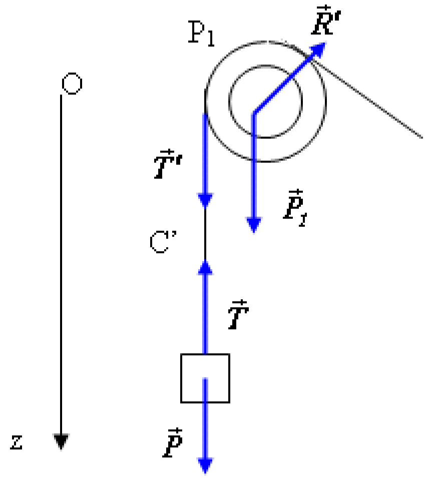
$$z=2x\Leftrightarrow\ddot{z}=2\ddot{x}$$

$$a_1=2a$$

$T_1=m_1(g-2a)$ أي أن $\quad m_1=\dfrac{T_1}{g-2a}$

في المرحلة الأولى : m_1=65g

في المرحلة الثانية m_1=21g (m_1 الكتلة التي يجب أن يأخذها الجسم S′ للحصول على حركة بالمواصفات المذكورة في المرحلة 2)



المعادلات الزمنية :

* المرحلة الأولى $z=2,5t^2$

* المرحلة الثانية $z=10t+10$

4 ـ عندما ينقطع الحبل .

السرعة الزاوية للأسطوانة : $\quad x=R\theta\Leftrightarrow\dot{x}=R\dot{\theta}$

$$\dot{\theta}=\frac{V_D}{R}$$

تطبيق عددي : $\dot{\theta}=20rad/s$

لحساب السرعة الزاوية للأسطوانة والسرعة الخطية للجسم S′ :

ـ نحسب المدة الزمنية المستغرقة من طرف S لمروره من A

عندما ينقطع الحبل : $t=4,87s$ أنظر السؤال 2

ـ الدراسة الدينامكية للمجموعة { أسطوانة +جسم S′ } عند انقطاع الحبل

نطبق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S′ $\quad \vec{P}+\vec{T}=m_1\vec{a}$

الاسقاط على Oz $\quad P-T=m_1a_2$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $T'.R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$

T=T′ نستنتج

$$(m_1g-m_1R_1\ddot{\theta}')R_1=J_\Delta\ddot{\theta}'$$

$$\ddot{\theta}'=\frac{m_1gR_1}{m_1R_1+J_\Delta}\Rightarrow\ddot{\theta}'=15,85rad/s^2$$

حركة البكرة حركة دورانية متغيرة بانتظام عند اللحظةt=3,9s السرعة الزاوية للأسطوانة هي

$$\dot{\theta}=15.85t+20\Rightarrow\dot{\theta}=97,2rad/s$$

وسرعة الجسم S′ هي $V = R_1\dot{\theta} \Rightarrow V = 48,6 m/s$

تمرين4

نعتبر جسما صلبا (S_1) كتلته $m_1 = 1kg$ قابل للانزلاق على سكة أفقية . (S_1) مرتبط بجسم (S_2) كتلته m_2 بواسطة خيط غير مدود ، كتلته مهملة ، يمر في مجرى بكرة (B) متجانسة شعاعها $r = 4cm$ قابلة للدوران بدون احتكاك حول محور (Δ) أفقي ثابت يمر من مركزها . خلال الحركة لا ينزلق الخيط على البكرة (B) .

عزم قصور (B) بالنسبة للمحور (Δ) هو J_Δ .

نحرر المجموعة المتكونة من من (S_1) و (S_2) و (B) بدون سرعة بدئية عند اللحظة ذات التاريخ $t_0 = 0$.

يمثل المنحنى الممثل في الشكل (2) تغيرات السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$ للبكرة .

1 ـ أوجد مبيانيا معادلة السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$.

2 ـ حدد معللا جوابك ، طبيعة حركة (B) .

3 ـ أوجد تعبير n عدد الدورات المنجزة من طرف (B) عند اللحظة t بدلالة الزمن t و $\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي لحركة (B) . أحسب n عند اللحظة $t = 1,25s$.

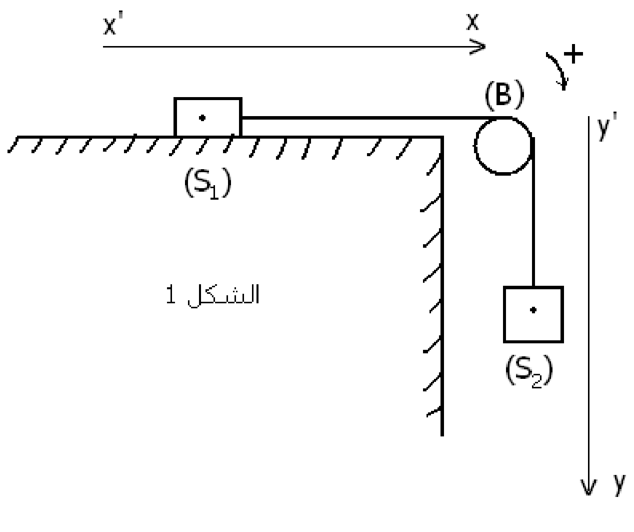
4 ـ حدد ، معللا جوابك ، طبيعة حركة كل من (S_1)و (S_2) ، ثم أحسب قيمة تسارعهما a .

5 ـ يتم التماس بين (S_1) والسكة باحتكاك حيث φ زاوية الاحتكاك . بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على كل من (S_1) و (S_2) و العلاقة الأساسية للتحريك على (B) ، بين أن تعبير التسارع a يكتب على الشكل التالي

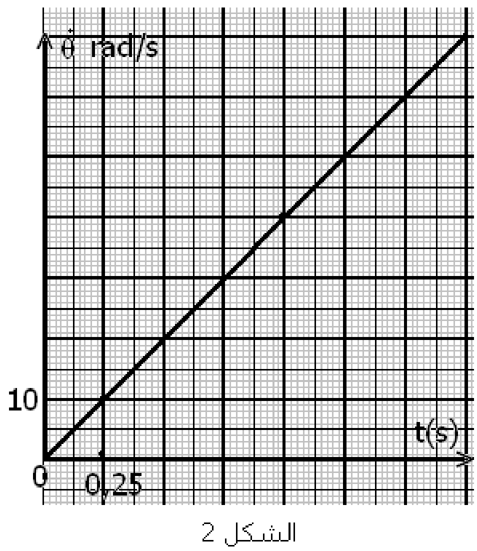
$$a = \frac{(m_2 - m_1.k)g}{m_1 + m_2 + \frac{J_\Delta}{r^2}}$$

حيث g تسارع الثقالة و $k = \tan\varphi$ معامل الاحتكاك .

6 ـ بين أن حركة (S_1) لا تتم إلا إذا كانت m_2 كتلة (S_2) أكبر من قيمة يجب تحديدها . نعطى $k = \tan\varphi = 0,16$



الشكل 1



الشكل 2

الجواب :

1 ـ إيجاد مبيانيا السرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$:

من خلال المبيان يتبين أن $\dot{\theta}(t)$ هي دالة خطية تمر من أصل المعلم معاملها الموجه هو :

$a=\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}=40rad/s^2$ وبالتالي فالمعادلة تكتب على الشكل التالي : $\dot{\theta}(t)=40t$

2 ـ طبيعة حركة (B) :

السرعة الزاوية عبارة عن دالة خطية على شكل $\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}t$ أي أن $\frac{d\dot{\theta}}{dt}=40rad/s^2=cte$ وبالتالي فحركة البكرة : حركة دورانية متغيرة بانتظام تسارعها الزاوي $\ddot{\theta}=40rad/s^2$.

3 ـ تعبير n عدد الدورات البكرة عند اللحظة t :

بما أن الحركة دورانية متغيرة بانتظام فإن معادلتها الزمنية تكتب على الشكل التالي :

$$\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2\Rightarrow\theta(t)=20t^2$$

ونعلم أن عدد الدورات خلال اللحظة t هو : $\theta(t)=2\pi n\Rightarrow n=\frac{\theta(t)}{2\pi}$

أي أن : $n=\frac{20t^2}{2\pi}=\frac{10t^2}{\pi}$

عند $t=1,25s$ يكون عدد الدورات هو : $n=4,97\simeq 5$

4 ـ طبيعة كل من S_1 و S_2 :

بما أن الخيط لا ينزلق على البكرة وغير مدود فإن المسافة x_1 التي ينتقل بها الجسم S_1 على $(O,\vec{i})$ هي نفس المسافة y_1 التي سينتقل بها الجسم S_2 على المحور $(O,\vec{j})$ ونفس طول القوس s_B الذي ستنتقل به نقطة على مجرى البكرة أي أن $x_1=y_1=s_B$ ولدينا $s_B=r\theta$ أي أن

$$x_1=y_1=r\theta\Rightarrow v_1=v_2=r\dot{\theta}\Rightarrow a_1=a_2=r\ddot{\theta}$$

نستنتج أن S_1 و S_2 لهما نفس التسارع وهو ثابت ، وبما أن مسار كل منهما مستقيمي فإن حركة كل منهما هي حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

حساب قيمة تسارعهما $a=r\ddot{\theta}=1,6m/s^2$

5 ـ لنثبت العلاقة التالية : $\mathrm{a}=\frac{(\mathrm{m_2}-\mathrm{m_1}.\mathrm{k})\mathrm{g}}{\mathrm{m_1}+\mathrm{m_2}+\frac{\mathrm{J_\Delta}}{\mathrm{r^2}}}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن على كل من S_1 و S_2 :

على S_1 : $\vec{P}_2+\vec{T}_2=m.\vec{a}$

نسقط العلاقة على $(O,\vec{j})$:

$$m_2g-T_2=m_2a\Rightarrow T_2=m_2g-m_2a$$

على S_1 : $\vec{P}_2+\vec{R}+\vec{T}_2=m_1.\vec{a}$

الإسقاط على $(O,\vec{i})$:

$$-f+T_2=m_2a$$

على $(O,\vec{j})$: $R_N-m_1g=0\Rightarrow R_N=m_1g$

نعلم أن $k=\tan\varphi=\frac{f}{R_N}\Rightarrow f=m_1gk$

في العلاقة الأولى : $T_2=km_1g+m_1a$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على B

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_1\right)+\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{T}_2\right)=J_\Delta\ddot{\theta}\Rightarrow -T_1.r+T_2r=J_\Delta.\frac{a}{r}$$

$$T_2-T_1=\frac{J_\Delta}{r^2}$$

نعوض T_1 و T_2 بتعبيريهما المحصل عليه سابقا :

$$a\left(m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}\right)=m_2g-km_1g\Rightarrow a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}}$$

لكي تتم حركة S_1 يجب أن يكون التسارع $a>0$ أي أن

$$a=\frac{g\left(m_2-km_1\right)}{m_1+m_2+\frac{J_\Delta}{r^2}}>0\Rightarrow m_2-km_1>0$$

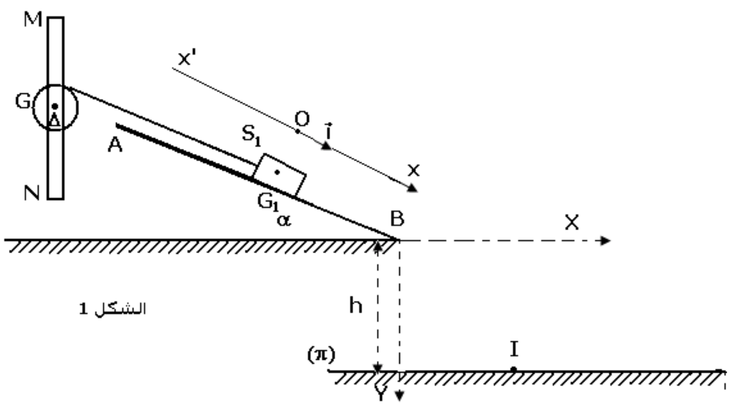
$$m_2>km_1\Rightarrow m_2>0.16kg$$

تمرين5

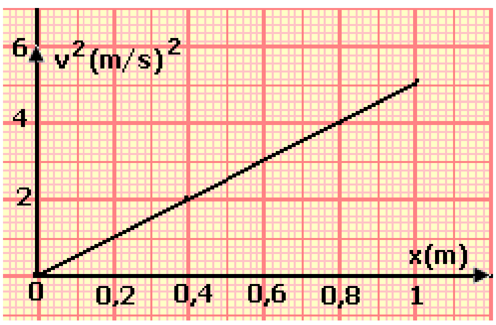
نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g=10m/s^2$

نعتبر المجموعة (S) الممثلة في الشكل (1) والمتكونة من :

ــ بكرة متجانسة شعاعها r=5cm ملتحمة بساق طولها MN=2L=40cm يتطابق مركز قصورها مع المركز G للبكرة . المجموعة {الساق ، البكرة } قابلة للدوران في المستوى الرأسي حول محور أفقي Δ ثابت يمر من المركز G . عزم قصور المجموعة بالنسبة للمحور Δ هو J_Δ .



ــ خيط f غير مدود كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة وثبت أحد طرفيه بجسم صلب S_1 كتلته m=0,8kg ومركز قصوره G_1 . الجسم S_1 قابل للانزلاق على مستوى مائل بزاوية $\alpha=30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي وفق الخط الأكبر ميلا .



نعتبر أن الخيط f لا ينزلق على مجرى البكرة أثناء الحركة .

نحرر المجموعة (S) بدون سرعة بدئية عند لحظة t=0 حيث يكون G_1 منطبقا مع الأصل O للمعلم $(O,\vec{i})$. نمعلم عند كل لحظة موضع G_1 بالأفصول x .

1 ــ أوجد اعتمادا على الدراسة التحريكية ، تعبير التسارع a لحركة الجسم S_1 بدلالة m ، r ، J_Δ ، α و g .

2 ــ يمثل منحنى الشكل (2) تغيرات مربع السرعة للجسم (S) بدلالة x $(v^2=f(x))$.

2 ــ 1 حدد قيمة a واستنتج قيمة التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للمجموعة {الساق ، البكرة } .

2 ــ 2 ينفصل الجسم S_1 عن الخيط لحظة مروره بالنقطة B ذات الأفصول $x_B=0,8m$ فيسقط عند I على المستوى الأفقي (π) الذي يوجد على مسافة h=1m من النقطة B .

2 ـ 2 ـ 1 أوجد إحداثيي النقطة I في المعلم $(\overrightarrow{BX},\overrightarrow{BY})$.

2 ـ 2 ـ 2 أحسب السرعة الخطية للطرف M للساق بعد انفصال الجسم S_1 عن الخيط .

الجواب :

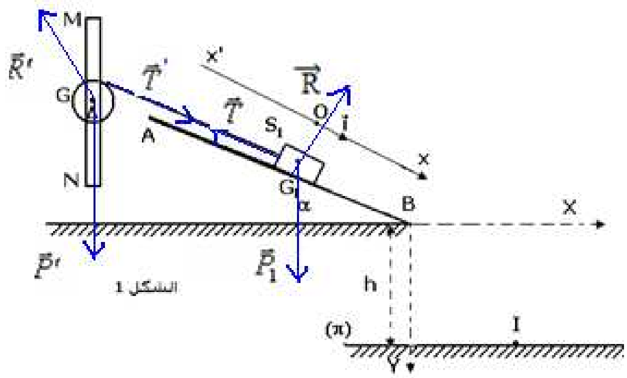
الدراسة التحريكية للجسم (S_1) :

المجموعة المدروسة : الجسم (S_1)

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن الجسم $\vec{P}_1$ ، تأثير السطح $\vec{R}$ ، تأثير الخيط (f) $\vec{T}$.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\sum \vec{F}_{ext} = m_1.\vec{a}$ و منه :



$\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}$.

إسقاط العلاقة المتجهية على المحور $(O;\vec{i})$ نحصل

على : $m_1.g.\sin\alpha - T = m_1.a$ و بالتالي :

$T = m_1 g \sin\alpha - m_1 a \quad (1)$

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة :

المجموعة المدروسة : البكرة

المعلم : مرتبط بالأرض و يعتبر غاليليا

جرد القوى : وزن البكرة $\vec{P}'$ ، تأثير محور الدوران $\vec{R}'$ ،

تأثير الخيط (f) $\vec{T}'$.

$\sum M_\Delta(\vec{F}_{app}) = J_\Delta.\ddot{\theta}$ و منه : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}') + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}') = J_\Delta.\ddot{\theta}$ مع $M_\Delta(\vec{P}') = M_\Delta(\vec{R}') = 0$

و بالتالي نحصل على المعادلة التالية : $T'.r = J_\Delta.\ddot{\theta} \quad (2)$

بما أن الخيط غير مدود و كتلته مهملة فان : $T' = T$ و من جهة أخرى لا ينزلق على مجرى البكرة فان :

$\theta = \dfrac{x}{r}$ و منه : $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r}$. من المعادلتين (1) و (2) نستنتج تعبير تسارع الجسم حيث : $a = g.\dfrac{m.\sin\alpha}{m + \dfrac{J_\Delta}{r^2}}$

2 – 1 – من خلال المبيان يتبين أن $V^2 = f(x)$ دالة خطية معادلتها : $v^2 = b.x$ مع a يمثل المعامل الموجه

للمنحنى ، نحصل باشتقاق هذه المعادلة بالنسبة للزمن على : $2.v.\dfrac{dv}{dt} = b.v$ و منه :

$$a = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta(v^2)}{\Delta(x)} = 2.5 m.s^{-2} .$$

حساب التسارع الزاوي للمجموعة : $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r} = \dfrac{2.5}{5.10^{-2}} = 50 rad.s^{-2}$.

2 – 2 – 1 – إحداثيي النقطة I :

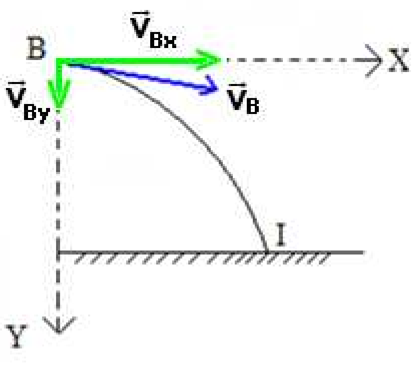
حساب السرعة v_B

باستعمال المعادلة الزمنية للحركة $x(t)$ و $v(t)$ عند انتقال الجسم من A إلى B ، وإقصاء الزمن بينهما :

$$x_B - x_A = \frac{1}{2}at^2$$

$$v_B - v_A = at$$

$$V_B = \sqrt{2.a.x_B} = 2 m.s^{-1}$$



المعادلتين الزمنيتين :

بعد إقصاء الزمن $t = \dfrac{x}{V_B.\cos(\alpha)}$

$$\begin{cases} x = V_B.\cos(\alpha).t \\ y = \dfrac{1}{2}.g.t^2 + V_B.\sin(\alpha).t \end{cases}$$

نحصل على معادلة المسار

$y = \dfrac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x^2 + \tan(\alpha).x$ و منه : $y_I = h = \dfrac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I$ و بالتالي نحصل على

معادلة من الدرجة الثانية : $\dfrac{g}{2.V_B^2.\cos^2(\alpha)}.x_I^2 + \tan(\alpha).x_I - h = 0$ التي يمكن كتباتها على الشكل التالي :

$1.66.x_I + 0.577.x_I - 1 = 0$ و أحد حلولها $x_I = 0.62m$

إحداثيتي النقطة I $\left.\begin{matrix} x_I = 0.62m \\ y_I = 1m \end{matrix}\right\}$

2 – 2 – 2 – السرعة الخطية للطرف M بعد انفصال الجسم :

$\dot{\theta}_B = \dot{\theta}_M$ و التعويض نجد : $\dfrac{V_B}{r} = \dfrac{V_M}{L}$

و بالتالي : $\boxed{V_M = V_B \dfrac{L}{r} = 8m.s^{-1}}$.