الدرس العاشر

مبرهنة فيثاغورس

ملخص الدرس

مبرهنة فيثاغورس المباشرة :

إذا كان مثلثقائم الزاوية فإن مربع وتره يساوي مجموع مربعي ضلعيه الآخرين

مبرهنة فيثاغورس العكسية :

إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع طول الضلع الثالث فإن المثلث قائم الزاوية

التمارين :

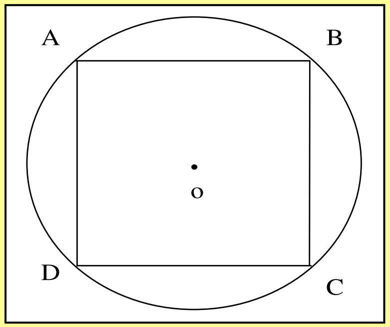
التمرين الأول :

ليكن ABCD مربعا محاطا بدائرة مركزها o و شعاعها $r = 8\ cm$

1- أحسب AB

2- ليكن H المسقط العمودي ل o على[AB]حدد oH

3- حدد مساحة ABCD



التمرين الثاني :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

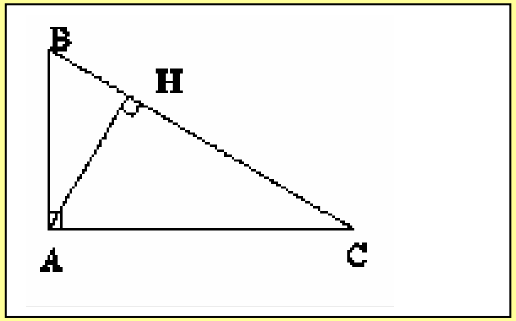
بحيث $AB = 9$ و $AC = 12$

1- حدد مساحة المثلث ABC

2- أحسب AH

3- نضع $BH = x$

حدد x لكي تكون للمثلثين ABH و AHC نفس المساحة



التمرين الثالث :

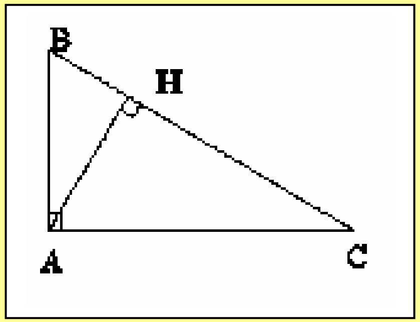
ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

1- بين أن : $AB \times AC = AH \times BC$

2- بين أن: $AB^2 = BH \times BC$

$AC^2 = CH \times BC$



3- بين أن : $AH^2 = BH \times CH$

4- بين أن : $BH^2 + CH^2 + 2\,AH^2 = BC^2$

5- بين أن : $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

التمرين الرابع :

ليكن EFG مثلثا بحيث $GF = 4$ و $EF = 2\sqrt{3}$

1- أحسب EG لكي يكون المثلث EFG قائم الزاوية في E

2- أحسب ارتفاعه EH

3- أحسب FH

التمرين الخامس :

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A

و H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

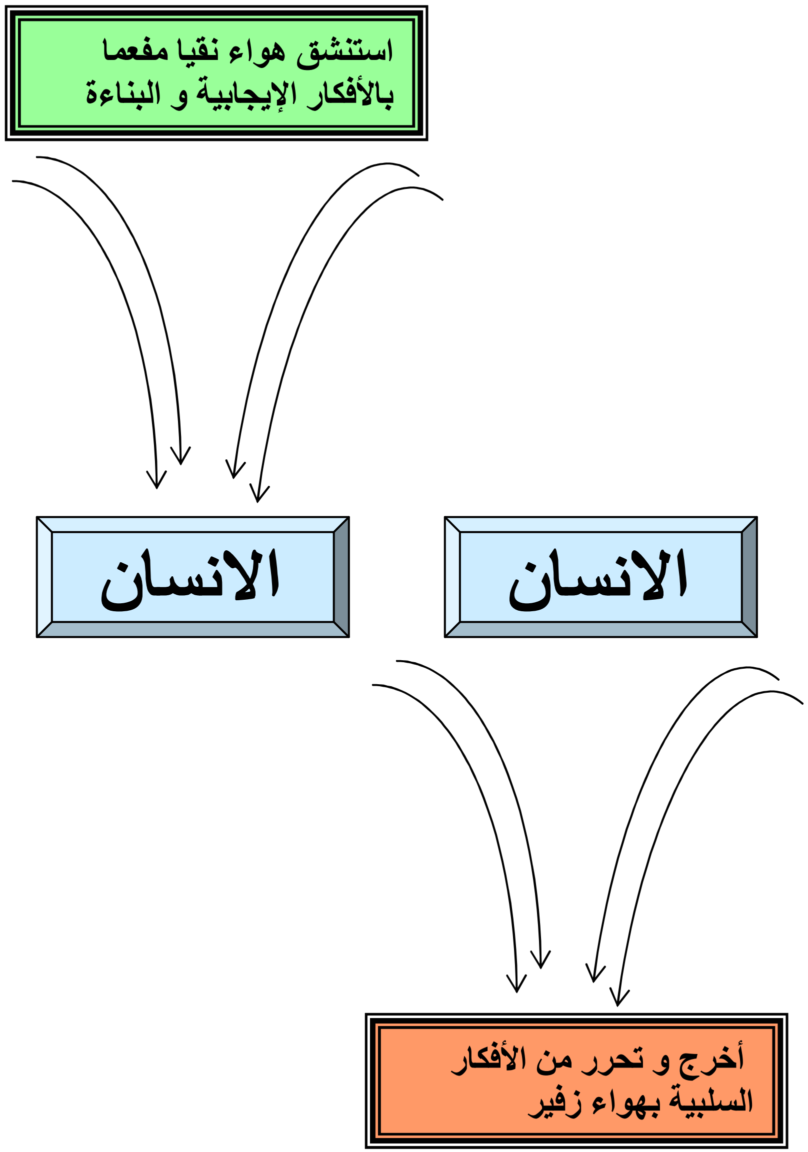
المنصف الداخلي للزاوية $B\hat{A}C$ يقطع (BC) في I

و K هي المسقط العمودي للنقطة I على (AB)

1- بين أن: $KI = KA$

2- بين أن : $\dfrac{1}{KI} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB}$

3- استنتج أن : $AI = \sqrt{2}\ AC \times \dfrac{AB}{AC + AB}$



حـــــــــل تماريـــــن مبرهنـــة فيثاغورس

حل التمرين الأول:

1- حساب AB

لدينا [AC] قطر في الدائرة إذن المثلث ABC قائم الزاوية في B

حسب مبرهنة فيثاغورس $AB^2 + BC^2 = AC^2$

بما أن ABCD مربع فإن $AC = AB = BC$ إذن $2\,AB^2 = AC^2$

و منه فإن $AB^2 = \frac{AC^2}{2}$

$$AB = \frac{1}{\sqrt{2}}\,AC = \frac{\sqrt{2}}{2}\,AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\,r$$

$$= r\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

إذن $AB = 8\sqrt{2}$ cm

2- مساحة المثلث oAB تكتب على شكلين

$$S = \frac{oA \times oB}{2}$$

و من جهة أخرى لدينا

$$S = \frac{oH \times AB}{2}$$

إذن $\frac{oA \times oB}{2} = \frac{oH \times AB}{2}$

$$oH = \frac{oA \times oB}{AB} = \frac{64}{8\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

$oH = 4\sqrt{2}$ cm

-3 $S_{ABCD} = a^2 = AB^2 = (8\sqrt{2})^2$

$= 128\ cm^2$

حل التمرين الثاني:

ABC قائم الزاوية في A إذن : $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

$$= \frac{9 \times 12}{2}$$

$$= 54$$

2- لدينا $S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2}$ و الذي هو تعبير ثاني لمساحة مثلث

إذن $AH = \frac{2\,S_{ABC}}{BC}$

من جهة ثانية حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث ABC

لدينا $AB^2 + AC^2 = BC^2$

$2\,HB = BC$

$HB = \dfrac{BC}{2}$

إذن $x = HB = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{15}{2}$

حل التمرين الثالث

1- مساحة مثلث قائم الزاوية مع H المسقط العمودي للنقطة A على (BC)

تكتب على شكلين

$S = \dfrac{AH \times BC}{2}$ و $S = \dfrac{AB \times AC}{2}$

و بالتالي $\dfrac{AH \times BC}{2} = \dfrac{AB \times AC}{2}$

إذن $AH \times BC = AB \times AC$

2- حسب مبرهنة فيثاغورس في المثلث القائم الزاوية ABC

ABH قائم في H :

$AB^2 = AH^2 + BH^2$

ACH قائم في H

$AC^2 = AH^2 + HC^2$

$AB^2 = BC^2 - AC^2$

يعني $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$

و بالتالي $AH = \dfrac{2\,S_{ABC}}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$

$= \dfrac{2 \times 54}{\sqrt{144 + 81}}$

$AH = \dfrac{108}{\sqrt{225}}$

$= \dfrac{108}{15}$

$= \dfrac{36}{5}$

-3 $S_{ABH} = \dfrac{AH \times HB}{2}$

$S_{AHC} = \dfrac{AH \times HC}{2}$

للمثلثين ABH و AHC نفس المساحة إذن :

$\dfrac{AH \times HB}{2} = \dfrac{AH \times HC}{2}$

(1) $HB = HC$

بما أن $HC = BC - HB$ فإن :

العلاقة (1) تصبح

$HB = BC - HB$

$= (BH + HC) - AC^2$

$= BH^2 + 2\,BH \times HC + HC^2 - AC^2$

$= BH^2 + 2\,BH \times (BC - BH) + (AC^2 - AH^2) - AC^2$

$= BH^2 + 2\,BH \times BC - 2\,BH^2 - AH^2$

و لدينا $- AH^2 = BH^2 - AB^2$

$AB^2 = 2\,BH \times BC - BH^2 + BH^2 - AB^2$

و بالتالي $2\,AB^2 = 2\,BH \times BC$

إذن $\boxed{AB^2 = BH \times BC}$

$AC^2 = BC^2 - AB^2$

$= BC^2 - BH \times BC$

$= BC\,(BC - BH)$

$= BC \times CH$

3- لدينا حسب السؤال (1)

$AB \times AC = AH \times BC$

يعني $AH^2 = \dfrac{AB^2 \times AC^2}{BC^2}$

$= \dfrac{(BH \times BC) \times (BC \times CH)}{BC^2}$

$= BH \dfrac{\times CH \times BC^2}{BC^2}$

$\boxed{AH^2 = BH \times CH}$

-4

$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad (1)$

ABH قائم في H إذن $AB^2 = AH^2 + BH^2$

ACH قائم في H إذن $AC^2 = AH^2 + HC^2$

ثم نعوض في (1) <==

$BC^2 = AH^2 + BH^2 + AH^2 + CH^2$

$\boxed{BC^2 = BH^2 + CH^2 + 2\,AH^2}$

-5

نوحد المقام : $\dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{AC^2 + AB^2}{AB^2 \times AC^2}$

حسب السؤال (2) $= \dfrac{BC^2}{(BH \times BC) \times (CH \times BC)}$

حسب السؤال (3) $= \dfrac{BC^2}{BH \times CH \times BC^2}$

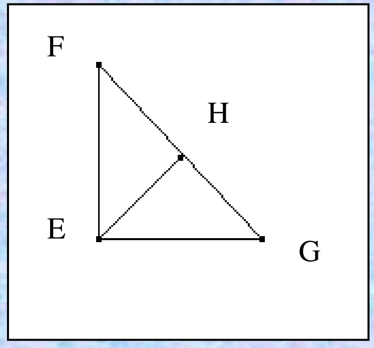
$= \dfrac{1}{BH \times CH}$

$$= \frac{1}{AH^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}}$$

حل التمرين الرابع:

1- EFG قائم الزاوية في E إذن :



$$EF^2 + EG^2 = FG^2$$

$$EG^2 = FG^2 - EF^2$$

$$EG = \sqrt{FG^2 - EF^2}$$

$$= \sqrt{16 - 12}$$

$$= \sqrt{4}$$

$$= 2$$

2- حساب EH :

$$S = \frac{EH \times FG}{2}$$

تعريف آخر للمساحة

$$S = \frac{EF \times EG}{2}$$

إذن

$$\frac{EH \times FG}{2} = \frac{EF \times EG}{2}$$

و بالتالي

$$EH = \frac{EF \times EG}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3} \times 2}{4}$$

$$= \sqrt{3}$$

3- حساب FH

في المثلث EFH القائم الزاوية في H لدينا

$$EH^2 + HF^2 = EF^2$$

إذن

$$HF^2 = EF^2 - EH^2$$

$$HF = \sqrt{EF^2 - EH^2}$$

$$= \sqrt{12 - 3}$$

$$= \sqrt{9}$$

$$= 3$$

حل التمرين الخامس:

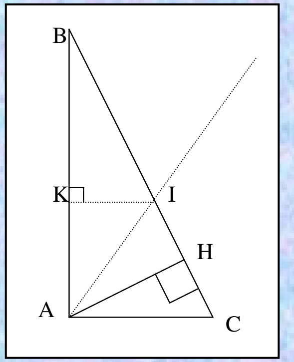
-1

لدينا K المسقط العمودي ل I على (AB)

إذن (KI) عمودي على (AB)

و لدينا (AC) عمودي على (AB)

و بالتالي : $(KI) /\!/ (AC)$



إذن الزاوايتان / من جهة آخرى لدينا

$$\begin{cases} K\hat{I}A = I\hat{A}C \\ K\hat{A}I = I\hat{A}C \end{cases}$$

إذن : $K\hat{I}A = K\hat{A}I$

هاتان زاوويتان في المثلث KIA إذن المثلث KIA متساوي الساقين

و بالتالي $KI = KA$

2- نبين أن $\dfrac{1}{KA} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AB}$

لدينا $(KI) /\!/ (AC)$ حسب مبرهنة طاليس المباشرة

لدينا

$$\frac{BK}{BA} = \frac{BI}{BC} = \frac{KI}{AC}$$

$$KI = \frac{BK \times AC}{BA}$$

$$= \frac{(AB - AK) \times AC}{AB}$$

$$= \frac{AB \times AC - AK \times AC}{AB}$$

$$= AC - \frac{AK \times AC}{AB}$$

لدينا حسب السؤال $AK = KI$ (1)

إذن

$$KI + \frac{KI \times AC}{AB} = AC$$

$$KI\,(1 + \frac{AC}{AB}) = AC$$

يعني

$$KI\,(\frac{AB + AC}{AB}) = AC$$

$$KI = \frac{AC \times AB}{AB + AC}$$

إذن

$$\frac{1}{KI} = \frac{AB + AC}{AC \times AB}$$

$$= \frac{AB}{AC \times AB} + \frac{AC}{AC \times AB}$$

$$= \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$

$$\boxed{\frac{1}{KI} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}}$$

3- لدينا

$$AI^2 = AK^2 + KI^2$$

$$= 2\,AK^2$$

إذن

$$AI = \sqrt{2}\ AK$$

و حسب السؤال (2) لدينا

$$\frac{1}{KI} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AB}$$