التمرين رقم : 01 (8 ن)

ليكن a عددا عقديا غير منعدما

لكل $z\in\mathbb{C}-\{a\}$ نضع $f_a(z)=\dfrac{az}{z-a}$

1 – بين أن: $f_a(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow |z|^2\,\mathrm{Re}(a)=|a|^2\,\mathrm{Re}(z)$

2 – نضع: $|z-a|=r$ و $\arg(z-a)\equiv\theta[2\pi]$ حيث $z\in\mathbb{C}-\{a\}$

أ - أحسب $|f_a(z)-a|$ بدلالة r و $|a|$

ب- أحسب $\arg(f_a(z)-a)$ بدلالة θ و $\arg(a)$

3– نفترض أن : $a=-1+i$ و أن:المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر في المستوى العقدي لكل (P) المجموعات التالية :

$$(\Delta)=\left\{M(z)\in(\mathrm{P})/\arg(f_a(z)-a)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$$

و $(E)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/f_a(z)\in i\mathbb{R}\}$ و $(\Sigma)=\{M(z)\in(\mathrm{P})/|f_a(z)-a|=2\}$

أ - حدد و أنشئ كل من (Δ) و (E) و (Σ)

ب– لتكن : $B=(\Delta)\cap(\Sigma)$ و z_0 لحقها في المستوى العقدي

حدد : $f_a(z_0)$ على شكله الجبري ثم استنتج قيمة العدد z_0 (الشكل الجبري للعدد z_0 .غير مطلوب)

التمرين رقم :02 (5 ن)

لتكن f دالة عددية متصلة وتزايدية على مجال $[a,b]$.

نعتبر المتتالية العددية $(S_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad S_n=\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(a+k\dfrac{(b-a)}{n}\right)$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $\forall k\in\{0,1,\ldots,n\}$ $\quad x_k=a+k\dfrac{(b-a)}{n}$

1 – بين أن: $\forall k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$ $\quad \dfrac{b-a}{n}f(x_k)\leq\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(t)dt\leq\dfrac{b-a}{n}f(x_{k+1})$

2 – استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad S_n\leq\int_a^b f(t)dt\leq S_n+\dfrac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$ ثم استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

3– تطبيق : أحسب النهايتين التاليتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\cdots+\sqrt[n]{2^{n-1}}}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$

التمرين رقم :03 (7 ن)

I) نعتبر الدالة العددية F_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad F_n(x)=\int_0^x e^{-nt^2}dt$

1) بين أن F_n دالة فردية

2) بين أن F_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وحدد دالتها المشتقة و استنتج تغيراتها

3) بين أن : $\forall t\in[0,1]$ $\quad e^{-t^2}\geq1-t^2$

II) نضع : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad U_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)dt$

1) بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad U_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)dt$

2) بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad U_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}U_n$ و استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad U_{2n+1}=\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

3) أ - بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad U_{2n+1}=\int_0^1(1-t^2)^n\,dt$

ب - استنتج أن: $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad F_n(1)\geq\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

لمزيد من دروس التمارين الامتحانات . . . موقع قلمي

AHMED MOUMNI