

لتكن f و g الدالتين العدديتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = \ln(1+e^{-x})$ و $g(x) = \ln(1+x)$.

نعتبر $(\mathcal{E}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- I. 1. أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. أ- تحقق من أن : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x + \ln(1+e^x)$.
ب- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{E}_f)$ يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ ينبغي تحديده.
ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{E}_f)$ والمستقيم (Δ) .
3. أ- ضع جدول تغيرات الدالة f .
ب- أدرس تقعر المنحنى $(\mathcal{E}_f)$.
4. أنشئ $(\mathcal{E}_f)$ و المستقيم (Δ) والمماس (T) للمنحنى $(\mathcal{E}_f)$ في النقطة ذات الأفصول 0.
5. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال I ينبغي تحديده ، ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل $x \in I$.

II. 1. بين أن : $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq g(t) \leq t$

ثم استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$

2. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $a_n = \int_0^n f(x) dx$.

أ- بين أن $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة. نضع : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$. أعط تأويلا هندسيا للعدد a .

ب- بين أن : $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$.

3. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \times \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$

أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

III. لكل $x \in]-1, 1[$ و لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = x + \frac{(-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

1. بين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}^*, g(x) = g_n(x) + \int_0^x (-1)^n \frac{t^n}{1+t} dt$

2. نضع : $R_n(x) = g(x) - g_n(x)$.

بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ ، ثم استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = g(x)$.

3. نضع : $x = -\frac{1}{2}$. حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| g\left(-\frac{1}{2}\right) - g_n\left(-\frac{1}{2}\right) \right| < 10^{-2}$$

4. ليكن $p \in \mathbb{N}^*$ وليكن $x \in \left[\frac{1}{p}, p\right]$.

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* , g_n(e^{-x}) - \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq f(x) \leq g_n(e^{-x}) + \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$.

ب- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = 1 + \frac{(-1)}{2^2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

بين أن : $u_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leq a \leq u_n + \frac{1}{(n+1)^2}$.

بين أن : $a = \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{p}}^p f(x) dx$ ، ثم استنتج أن : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

استنتج تأطيرا للعدد a إلى 10^{-1} .

1

أ. حل في $\mathbb{N}^2$ النظام التالية :

$$\begin{cases} a+b=360 \\ a \wedge b=18 \end{cases}$$

ب. ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و $p \in \mathbb{Z}$.

1. بين أنه إذا كان : p أوليا وكان p لا يقسم a ، فإن : $p \wedge a = 1$.

2. أ- حدد a و b بحيث :

$$\forall k \in \mathbb{Z} : 9k + 4 = a(2k - 1) + k + 8 ; 2k - 1 = b(k + 8) - 17$$

ب- استنتج أن :

$$k \equiv 9 [17] \Rightarrow (9k + 4) \wedge (2k - 1) = 17$$

$$k \not\equiv 9 [17] \Rightarrow (9k + 4) \wedge (2k - 1) = 1$$

2

1. حل في $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ النظام التالية : $(*) : \begin{cases} \bar{2}x + \bar{6}y = \bar{4} \\ x - \bar{3}y = \bar{0} \end{cases}$.

2. أ- أوجد جميع الأزواج (a, b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث يكون العددان $2a + 6b - 4$ و $a - 3b$ قابليين للقسمة على 8 في آن واحد.

ب- لكل حل ، ماهو باقي القسمة الأقليدية للعدد $a + b$ على 8.

3. استنتج شرطا لازما وكافيا لكي يكون زوج أعداد فردية a و b ، حلا للنظمة $(*)$.