الثانية بكالوريا علوم رياضية	دراسة الدوال	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln x}{x-1} & ; \quad x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

I. 1. أ- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أدرس اتصال الدالة f في النقطة 1.

2. ليكن t عنصرا من المجال $]-1,+\infty[$.

أ- بين أن : $\left|\int_0^t \dfrac{u^2}{1+u}du\right| \le t^2\left|\ln(1+t)\right|$.

ب- بين أن : $\int_0^t \dfrac{u^2}{1+u}du = \ln(1+t)-t+\dfrac{t^2}{2}$.

جـ- استنتج أن الدالة f قابلة للإشتقاق في النقطة 1 وأن : $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$.

3. أدرس تغيرات الدالة f .

II. لتكن G الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} G(x)=\int_x^{x^2} f(t)dt & ; \quad x\neq 0 \\ G(0)=0 \end{cases}$$

1. بين أن حيز تعريف الدالة G هو $]0,+\infty[$.

2. أ- بين أن : $\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad \dfrac{2x\ln x}{x+1}\le G(x)\le x\ln x$

(يمكن استعمال رتابة الدالة f)

ب- أدرس اتصال الدالة G على اليمين في النقطة 0 .

جـ- أدرس قابلية اشتقاق الدالة G على اليمين في 0 .

د- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.

3. نضع : $F(x)=\int_1^x f(t)dt \quad ; \quad \forall x\in]0,+\infty[$.

أ- عبر عن $G(x)$ بدلالة $F(x^2)$ و $F(x)$.

ب- أدرس تغيرا ت الدالة G .

4. نقبل أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}=0$. أنشئ منحنى الدالة G في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نعطي : $G\left(\dfrac{1}{3}\right)\approx -0,4$)

التمرين 2 :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=1-x\ln x & ; \quad x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1. أ- تحقق أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

جـ- أدرس تغيرات الدالة g وضع جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن : $\exists!\alpha\in]e^{-1},+\infty[\quad : \quad g(\alpha)=0$.

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على حيز تعريفها .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]e^{-1},+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}} & ; \quad x>e^{-1} \\ f\left(e^{-1}\right)=0 \end{cases}$$

ليكن $\mathscr{C}$ منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أن الدالة f متصلة على اليمين في e^{-1} .

2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

3. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}}\dfrac{f(x)}{x-e^{-1}}=0$. يمكنك استعمال المتساوية :

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x-e^{-1}}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(ex)}{ex-1}\right)+(e-1)\ln(ex-1)+\frac{1-ex}{x}\ln(ex-1)+1$$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

4. لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]e^{-1},+\infty[$.

أ- بين أن :

$$\forall x\in]e^{-1},+\infty[\quad : \quad f'(x)=\frac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}f(x)$$

ب- حدد بدلالة α حل المعادلة $f'(x)=0$ في $]e^{-1},+\infty[$.

α هو العدد المعرف في الجزء الأول .

جـ- ضع جدول تغيرات الدالة f .

5. أدرس وضع المنحنى $\mathscr{C}$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=1$.

6. أنشئ المنحنى $\mathscr{C}$. نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5cm$

$e^{\alpha-1}\approx 2,2$ و $e^{-1}\approx 0,4$ و $f(e^{\alpha-1})\approx 1,3$

ونقبل أن المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل نقطتي انعطاف I_1 و I_2 بحيث أفصوليهما x_1 و x_2 يحققان على التوالي :

$e^{-1}<x_1<1$ و $x_2>e^{\alpha-1}$ (حساب x_1 و x_2 غير مطلوب)

التمرين 3 :

نذكر بأن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad : \quad n!=1\times 2\times 3\times\ldots\times(n-1)\times n$

وأن : $0!=1$

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نعتبرالدالة العددية f_n المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي:

$$f_n(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

1. لكل عدد حقيقي a موجب ولكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نضع :

$$I_n(a)=\int_0^a f_n(t)dt$$

أ- أحسب $I_1(a)$ بدلالة a .

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*; \quad \forall t\in\mathbb{R}^* \quad : \quad 0\le f_n(t)\le\dfrac{t^n}{n!}$.

واستنتج تأطيرا للعدد $I_n(a)$ بدلالة n و a .

2. بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ f_n تناقصية قطعا على المجال $[n,+\infty[$.

3. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad \frac{1}{n!} < \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(a) = 0$.

التمرين 4 :

I. ليكن λ وسيطا حقيقيا . نعتبر الدالة العددية f_λ المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f_\lambda(x) = \frac{\ln(x)+\lambda}{x^2+1}$.

وليكن $\mathscr{C}_\lambda$ المنحنى الممثل للدالة f_λ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- لتكن $M(\alpha,\beta)$ نقطة من المستوى بحيث $\alpha > 0$. بين أنه يوجد منحنى وحيد $\mathscr{C}_\lambda$ بحيث $M(\alpha,\beta) \in \mathscr{C}_\lambda$.

ب- بين أن f_λ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ وأن إشارة $f'_\lambda(x)$ هي إشارة $g_\lambda(x)$ حيث :

$$g_\lambda(x) = x^2 + 1 - 2x^2\left(\ln(x)+\lambda\right)$$

جـ- أدرس تغيرات الدالة g_λ ؛ محددا النهايتين :

$\lim\limits_{x\to0^+} g_\lambda(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g_\lambda(x)$

د- بين أن المعادلة $g_\lambda(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا m_λ في المجال $]0,+\infty[$ ؛ ثم استنتج إشارة g_λ .

هـ- بين أن : $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.

و - أحسب نهايات f_λ عند محدات $]0,+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن : $m_0 \in]1,2[$ و $m_{-1} \in]4,5[$ وحدد قيمة m_1 .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $\mathscr{C}_\lambda$ و $\mathscr{C}_{\lambda'}$ حيث : $(\lambda,\lambda') \in \mathbb{R}^2$.

3. أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $\mathscr{C}_{-1}$ و $\mathscr{C}_0$ و $\mathscr{C}_1$.

II . نعتبر الدالتين العدديتين φ و F المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{Arc\tan(x)}{x} & ; \quad x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

و

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_1^x f_0(t)dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt & ; \quad x > 0 \\ F(0) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(t)dt \end{cases}$$

1. أ- بين أن F معرفة على $\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن F متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ وأحسب $F'(x)$ لكل $x > 0$.

2. بين أن : $\forall x > 0 \quad : \quad F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$.

3. أ- بين أن : $\forall x > 0 \quad : \quad F(x) = Arc\tan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)dt$.

ب- استنتج أن F متصلة في الصفر.

جـ- بين أن : $\forall x > 0 \quad : \quad \frac{F(x)-F(0)}{x} \le \varphi(x)\ln(x)$.

ثم استنتج أن F غير قابلة للاشتقاق في الصفر ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

4. نضع : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0 \quad : \quad I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)dt$.

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ؛ بين أن :

$$\forall x > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad I_k(x) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to0^+} I_k(x)$ ؛ ثم بين أن :

$$\lim_{x\to0^+} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} .$$

جـ- بين أن :

$$\forall x > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad : \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$$

د- استنتج أن :

$$\forall x > 0 \quad : \quad F(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) + (-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}dt$$

هـ- استنتج أن :

$$\forall x \in]0,1[\quad : \quad \left|F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x)\right| \le I_{2n+2}(x) .$$

5. نضع : $\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

باستعمال السؤال (4.أ-) ؛ بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad |F(0) - u_n| \le \frac{1}{(2n+3)^2} .$$

ثم حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2} .

التمرين5 :

I. 1. بين أن :

$$\forall x > 0 \quad : \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \le e^{-x} \le 1 - x + \frac{x^2}{2} .$$

2. استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$.

3. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = (1+x)e^{-x}$

أ- أحسب نهايات g عند محدات $\mathscr{D}_g$.

ب- أدرس تغيرات الدالة g .

II. المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^{-2x} - e^{-3x}}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. حدد نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0 .

3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند العدد 0 .

4. أ- تحقق أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad : \quad f'(x) = \dfrac{g(3x) - g(2x)}{x^2}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f .

5.أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

III. نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$\forall x > 0 \quad : \quad F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

1. بين أن :

$$\forall x > 0; \quad \forall m > 0 \quad : \quad \int_1^x \frac{e^{-mt}}{t}dt = \int_m^{mx} \frac{e^{-u}}{u}du$$.

2.استنتج أن : $\forall x > 0 \quad : \quad F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

3. أ- باستعمال مبرهنة المتوسط ؛ بين أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt = 0$$.

ب- استنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

4. أ- بين أن :

$$\forall x > 0 \quad : \quad e^{-3x} \ln\left(\frac{3}{2}\right) \le \int_{2x}^{3x} \frac{e^{-t}}{t}dt \le e^{-2x} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$.

ب- استنتج أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = \int_2^3 \frac{e^{-t}}{t}dt - \ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

5. ليكن $\lambda > 0$ و $\mathcal{A}(\lambda)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 0$ و $x = \lambda$. أحسب : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$.

التمرين6:

I. المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$ ؛ ونعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} & ; \quad x < 1 \\ f(x) = (x-1)Arc\tan(x) & ; \quad x \ge 1 \end{cases}$$

1. أ- حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

ب- حدد نهايات f عند محدات $\mathscr{D}_f$.

2. أدرس اتصال الدالة f وقابلية اشتقاقها عند العدد 1 .

3.أدرس تغيرات الدالة f وأعط جدول تغيراتها.

4. بين أن : $(\Delta) : y = ex$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$ وأن : $(\Delta') : y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

5. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

6. أحسب مساحة الحيز المستوي الذي يحده المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي هي : $x = 1$ و $x = 2$ و $y = 0$.

II. نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$\forall x \le 0 \quad : \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

1. بين أن : $\forall x \le 0 \quad : \quad xf(x) \le F(x) \le 2xf(2x)$.

2. أحسب النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

3. بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^-$ وأحسب مشتقتها $F'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^-$.

التمرين7:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \times \frac{(\ln x)^n}{x^2}$$

وليكن $(\mathscr{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1. أ- بين أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ وأحسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$

(ناقش حسب قيم n)

ب- أول مبيانيا النتيجتين السابقتين.

2. أ- أدرس تغيرات الدالة f_n . (ناقش حسب قيم n)

ب- بين أن الدالة f_n تقبل قيمة قصوية نسبية عند العدد الحقيقي $e^{\frac{n}{2}}$.

جـ- تحقق من أن : $f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right) = \frac{1}{n!} \times \left(\frac{n}{2e}\right)^n$.

3. أ- ليكن $x \in]0,+\infty[$.

أدرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ واستنتج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و$(\mathscr{C}_{n+1})$ تبعا لقيم n .

ب- حدد معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$ في النقطة ذات الأفصول 1.

جـ- أنشئ في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و$(\mathscr{C}_2)$.

(نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2cm$

ونعطي : $e \approx 2,7$ و $\sqrt{e} \approx 1,65$ و $\frac{1}{e} \approx 0,4$)

II. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نضع : $a_n = f_n\left(e^{\frac{n}{2}}\right)$.

1. أ- ليكن α عددا حقيقيا بحيث : $\alpha > 1$.

بين أن : $f_n(\alpha) > 0$ وأحسب : $\dfrac{f_{n+1}(\alpha)}{f_n(\alpha)}$.

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)$.

2. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad a_{n+1} < \frac{1}{2} a_n$

ب- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\geq 1}$ متقاربة وحدد نهايتها .

III. لكل n من $\mathbb{N}^*$ ولكل x من $\mathbb{R}^{+*}$ ؛ نضع :

$$I_n(x) = \int_1^x f_n(t)dt$$

1. ليكن x من $\mathbb{R}^{+*}$.

أ- ليكن k من $\mathbb{N}$ بحيث $k \geq 2$. بين أن :

$$I_{k+1}(x) - I_k(x) = -\frac{1}{(k+1)!} \times \frac{(\ln x)^{k+1}}{x} \quad .$$

ب- استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad I_n(x) = 1 - \frac{1}{x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(\ln x)^k}{x \times k!} \quad .$$

2. ليكن α عددا حقيقيا بحيث : $\alpha > 1$.

أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad : \quad 0 < I_n(\alpha) < (\alpha - 1)a_n$.

ب- استنتج نهاية المتتالية $\left(I_n(\alpha)\right)_{n\geq 1}$.

جـ- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ؛ نضع : $w_n(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\ln \alpha)^k}{k!}$.

عبر عن $w_n(\alpha)$ بدلالة $I_n(\alpha)$ واستنتج نهاية المتتالية $\left(w_n(\alpha)\right)_{n\geq 1}$.

د - حدد نهاية المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

التمرين 8: