

الأستاذ : الحيان		الأعداد العقدية		الثانية بكالوريا علوم رياضية	
التمرين 1 :					
I نعتبر المعادلة :					
$(E) : z \in \mathbb{C}; z^3 - 4(1-i)z^2 + 16(1-i)z + 64i = 0$					
1. تحقق من أن العدد $-4i$ حل للمعادلة (E) .					
2. حل المعادلة (E) .					
3. نعتبر العدد z_k بحيث: $z_k = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{4}\right)^k$ و $k \in \mathbb{Z}$					
أثبت أن: $z_k = \frac{i}{2^{k-1}} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ ثم استنتج أن : $z_{2001} = 0$.					
II المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.					
لتكن A صورة العدد z_A والنقطة B صورة العدد z_B بحيث :					
$z_B = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_A = 2 + 2i\sqrt{3}$					
1. أنشئ النقطة C صورة العدد z_C بحيث : $z_C = \frac{3}{2}z_A + z_B$					
2. حدد عمدة للعدد $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .					
التمرين 2 : نضع $\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = z + \frac{4}{z}$					
1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E) : P(z) = -2$					
2. نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) .					
أ. أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .					
ب. بين أن : $z_1^{2001} + z_2^{2001} = 2^{2002}$					
3. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.					
أ. لتكن النقط $A(\alpha)$ و $B(-1+\sqrt{3})$ و $C(-1-i\sqrt{3})$					
حيث α عدد حقيقي موجب . حدد قيمة α لكي يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع .					
ب. بين أن: $\forall z \in \mathbb{C}^* : P(z) = \overline{P(z)} \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z\bar{z} - 4) = 0$					
ج. استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من أجلها يكون $P(z)$ عددا حقيقيا .					
د. تحقق من أن النقط A و B و C تنتمي الى المجموعة (Γ) .					
التمرين 3 :					
A نضع : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ j est l'entier de JACOBI					
(j هو جذر من الرتبة الثالثة للوحدة : $j^3 = 1$)					
1. تحقق من أن : $j^2 = \bar{j}$ و أن $1 + j + j^2 = 0$.					
2. أكتب على الشكل المثلثي العددين $2i$ و $2ij$.					
B نعتبر P و Q التطبيقين من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ المعرفين كما يلي :					
$Q(z) = z^2 + 2ij^2z - 4j$ و $P(z) = (z - 2i\bar{j})Q(z)$					
1. أ. نعتبر المعادلة : $(E_1) : (z \in \mathbb{C}; Q(z) = 0)$					
تحقق من أن المميز المختصر Δ' يساوي $(\sqrt{3}j^2)^2$					
ب. حل المعادلة : (E_1)					
ج. أكتب حلي المعادلة (E_1) على الشكل المثلثي وعلى الشكل λi و λij حيث : $(\lambda \in \mathbb{R})$					
2. أ. أنشر $P(z)$.					
ب. استنتج حلول المعادلة:					
3. لتكن a و b و c هي حلول المعادلة (E) بحيث :					
$\text{Re}(a)=0$ و $\text{Re}(b)<0$ و $\text{Re}(c)>0$					
أ. تحقق من أن : $a + bj + cj^2 = 0$					
ب. في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر على التوالي النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي : a و b و c .					
بين أن ABC مثلث متساوي الأضلاع .					
التمرين 4 : نضع :					
$\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} : P(z) = \frac{2z - i}{z - i}$					
و $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ / $z = x + iy$					
1. أ. حدد $\text{Re}(P(z))$ بدلالة x و y ، حيث :					
$\text{Re}(P(z))$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي $P(z)$.					
ب. المستوى العقدي ρ منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$. حدد (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من ρ التي تحقق :					
$\text{Re}(P(z)) = 0$					
2. أ. بين أن :					
$\forall z \in \mathbb{C} - \{i\}; [P(z) = z] \Leftrightarrow [z^2 - (2+i)z + i = 0]$					
ب. حل المعادلة : $z^2 - (2+i)z + i = 0$; $z \in \mathbb{C}$					
ج. ليكن $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. أكتب على الشكل المثلثي كلا من العددين :					
$1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta)$					
و $1 - \cos(\theta) + i \sin(\theta)$					
د. استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين :					
$\frac{2 - \sqrt{3} + i}{2}$ و $\frac{2 + \sqrt{3} + i}{2}$					
التمرين 5 : لتكن $(S_n)_{n \geq 2}$ المتتالية العددية حيث:					
$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$					
1. بين بالترجع : صيغة موافر Formule de Moivre					
$\forall \theta \in \mathbb{R}; \forall n \in \mathbb{N};$					
$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$					
2) نضع : $Z_n = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$: $\forall n \geq 2$					

التمرين 8 : الحذور من الرتبة الخامسة للوحدة .

إنشاء الخمس المنتظم .

(Pentagone – régulier).

$$z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{ليكن}$$

1. نضع : $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ. بين أن : $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4 = 0$

واستنتج أن α و β هما حلا للمعادلة :

$$(*) : X^2 + X - 1 = 0$$

ب. أوجد α بدلالة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

ج. حل المعادلة (*) واستنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

2. لتكن A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 النقاط التي أحاطها على التوالي

هي 1 و z_0 و z_0^2 و z_0^3 و z_0^4 في المستوى المنسوب الى معلم

متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

أ. لتكن H نقطة تقاطع المستقيم $(A_1 A_4)$ و المحور $(O, \vec{u})$.

$$\overline{OH} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{بين أن :}$$

ب. الدائرة التي مركزها النقطة Ω ذات اللق $-\frac{1}{2}$, والمارة من

النقطة B ذات اللق i , تقطع المحور $(O, \vec{u})$ في نقطتين M

و N (نسمي النقطة التي أفصولها موجب)

بين أن : $\overline{OM} = \alpha$ و $\overline{ON} = \beta$

و أن H منتصف القطعة $[OM]$.

ج. استنتج إنشاء لمخمس منتظم مركزه O ومارة من نقطة A_0 .

التمرين 9 : نعتبر الدالة P المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R} : P(x) = \frac{1}{2i} \left[\left(1 + i \frac{x}{8}\right)^8 - \left(1 - i \frac{x}{8}\right)^8 \right]$$

1. بين أن P دالة حدودية معاملاتها أعداد حقيقية . ثم حدد درجتها وأدرس زوجيتها.

2. أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^8 = 1$, نعطي الحلول على شكلها الجبري .

ب. حل المعادلة : $P(x) = 0$: $x \in \mathbb{R}$

التمرين 10 : نعتبر الدالة الحدودية P من $\mathbb{C}$ الى $\mathbb{C}$ المعرفة

$$P(z) = (z - i)^n - (i - \bar{z})^n \quad \text{بما يلي :}$$

حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $\bar{z}$ مرافق العدد العقدي z .

1. لتكن A و M و M' صور الأعداد i و z و $\bar{z}$ على التوالي في المستوى العقدي .

أ. بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن : $AM = AM'$

ب. استنتج أنه إذا كان z حلا للمعادلة $P(z) = 0$ فإن : z عدد

حقيقي .

(2) حل المعادلة $P(z) = 0$.

أحسب المجموع : $\sum_{k=0}^{n-1} Z_n^k$ لكل $n \geq 2$.

$$3. \text{ بين أن : } \frac{2}{1 - Z_n} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad \forall n \geq 2$$

$$4. \text{ استنتج أن : } S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad \forall n \geq 2$$

$$5. \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$$

التمرين 6 : في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم

ومباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ؛ نعتبر النقاط A و B و C التي أحاطها على

التوالي هي a و b و c ؛ ونعتبر $\vec{u}_1$ و $\vec{u}_2$ متجهتين غير منعدمتين

بحيث : $\text{Aff}(\vec{u}_1) = z_1$ و $\text{Aff}(\vec{u}_2) = z_2$

$$1. \text{ بين أن : } \vec{u}_1 \text{ و } \vec{u}_2 \text{ مستقيمتان } \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 = 0$$

$$2. \text{ بين أن : } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$$

$$3. \text{ بين أن : } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$4. \text{ ليكن } j = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } \Omega \text{ نقطة لحقها } \omega .$$

أ. ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

بين أنه إذا كانت النقطة M' التي لحقها z' , هي صورة النقطة

M التي لحقها z , بالدوران R , فإن :

$$z' = -j^2 z - j \omega$$

(ب) استنتج أن : ABC مثلث متساوي الأضلاع

$$\Leftrightarrow a + bj + cj^2 = 0 \text{ أو } a + bj^2 + cj = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

ج. حدد الأعداد العقدية z التي من أجلها يكون المثلث ABC

متساوي الأضلاع , حيث : $a = i$ و $b = z$ و $c = iz$.

5. بين أن : النقاط A و B و C مستقيمية

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix} = 0$$

التمرين 7 :

$$1. \text{ بين أن : } e^{2ix} - 1 = 2i \sin(x) e^{ix} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(Z + 1)^n = e^{2in\alpha} \quad (n \in \mathbb{N}^* \text{ و } \alpha \in \mathbb{R})$$

$$3. \text{ نضع : } P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{أثبت أن : } P_n = \frac{\sin(na)}{2^{n-1}}$$

التمرين 11 : يكن f التطبيق من $\mathbb{C} - \{i\}$ نحو $\mathbb{C} - \{i\}$

$$f(z) = \frac{iz}{z-i} \quad \text{المعرف بما يلي :}$$

في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر

النقطة B ذات اللق i ؛ ونربط كل نقطة M بلحقها z .

1. حدد المجموعتين : $(E_1) = \{M(z) / f(z) \in \mathbb{R}\}$

و $(E_2) = \{M(z) / f(z) \in i\mathbb{R}\}$

2. حل في $\mathbb{C} - \{i\}$ المعادلة : $f(z) = -2z + 1$.

3. ليكن $z \in \mathbb{C} - \{i\}$. نعتبر r معيار $z - i$ و α قياسا لعمدة $z - i$.

أ. أكتب $f(z) - i$ على الشكل المثلثي .

ب. حدد (C) , مجموعة النقط $M(z)$ بحيث : $|f(z) - i| = \sqrt{2}$

ج. حدد (D) , مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $\frac{\pi}{4}$ قياسا لعمدة $f(z) - i$.

د. حدد z_0 بحيث $f(z_0) = 1 + 2i$.

لتكن A النقطة ذات اللق z_0 .

تحقق من أن A تنتمي إلى (C) و (D) .

أرسم (C) و (D) .

التمرين 12 : في المستوى الأفليدي $\mathcal{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد

ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ وليكن f

التطبيق من $\mathbb{C} - \{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ والمعرف بما يلي : $f(z) = \frac{\bar{z}(z-i)}{z+i}$

وليكن F التطبيق من $\mathcal{P} - \{A\}$ نحو $\mathcal{P}$ الذي يربط كل نقطة

$M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ حيث : $z' = f(z)$.

1. أثبت أنه إذا كان $z \neq 0$ و $z' \neq 0$ فإن :

$$\arg(z') \equiv -\arg(z) + 2\arg(z-i) [2\pi] \text{ و } |z| = |z'|$$

(لاحظ أن $z-i$ و $\bar{z}+i$ مترافقان)

ب. بين أنه إذا كان $|z| = 1$ فإن $f(z) = -i$.

2. أ. حدد مجموعة النقط الصامدة بالتطبيق F .

ب. ماهي مجموعة النقط $M(z)$ بحيث تكون $f(z)$ على شكل

ai مع a عنصر من $\mathbb{R}$ ؟

3. أ. أثبت أن :

$$z' + i = \frac{\bar{z}z - 1}{|\bar{z} + i|^2} (z - i)$$

وأن :

$$z' - z = \frac{-i(z + \bar{z})}{|\bar{z} + i|^2} (z - i)$$

ب. استنتج أن المتجهتين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{A'M'}$ مستقيمتان .

وأن $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متعامدتان .

ج. أعط طريقة للإنشاء الهندسي لصورة M بالتطبيق F .

التمرين 13 : α عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $[0, 2\pi[$.

1. أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + i(2^{\alpha+1} \cdot \sin(\alpha))z - 2^{2\alpha} = 0$

ب. أكتب الحلين على شكلهما المثلثي .

2. المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر A و B صورتين حلي المعادلة السابقة .

حدد α لكي يكون المثلث OAB متساوي الأضلاع .

التمرين 14 : ليكن θ عددا حقيقيا . لكل z من $\mathbb{C}$. نضع :

$$P(z) = z^3 + (1 + 3ie^{i\theta})z^2 + (1 + i(1 + 3e^{i\theta}))z + (3i - 3)e^{i\theta}$$

1. بين أن $z_1 = -3ie^{i\theta}$ حل للمعادلة : $P(z) = 0$: $z \in \mathbb{C}$; (E)

2. أ. حدد العددين العقديين a و b بحيث :

$$P(z) = (z + 3ie^{i\theta})(z^2 + az + b) \quad \text{لكل } z \text{ من } \mathbb{C} .$$

ب. ليكن z_2 و z_3 الحلين الآخرين للمعادلة (E) .

حدد z_2 و z_3 (z_2 هو الحل التخيلي الصرف)

3) أ. أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي .

ب. نضع : $\theta = \frac{\pi}{10}$. حدد الشكل الجبري للعدد العقدي α

حيث : $\alpha = z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$

التمرين 15 : لكل عدد عقدي z ؛ نضع :

$$P(z) = 2iz^3 + 2(2-i)z^2 - (3+2i)z + i$$

1. أ. أوجد العدد الحقيقي α بحيث : $P(i\alpha) = 0$

ب. تحقق أن : $P(z) = (z - \alpha i)Q(z)$

حيث : $Q(z) = ((1+i)z - i)^2$

2. نعتبر المعادلة :

$$(E) : z \in \mathbb{C} : z^2 - (m - i(m+1))z - im^2 - m = 0$$

حيث m بارامتر حقيقي .

أ. بين أن مميز المعادلة (E) هو $Q(m)$.

ب. حدد الجدرين z' و z'' للمعادلة (E) علما أن : $|z'| = |m|$

3. نضع $m = 2 \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ حيث $\theta \in [0, \pi]$,

ونعتبر المجموعة : $(C) = \{M(z'') / \theta \in [0, \pi]\}$

أ. بين أن (C) جزء من إهليلج ينبغي تحديد معادلته ورؤوسه في

المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ب. أنشئ (C) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. نضع : $m = \frac{2}{\cos(\theta)} + 3i \tan(\theta)$ حيث $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ونعتبر المجموعة : $(C') = \left\{M(z') / \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

أ. بين أن (C') جزء من هذلول (H) ينبغي تحديد معادلته ورؤوسه

ومقاربيه في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

ب. أنشئ (H) و (C') في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

التمرين 16 :

لكل z من المجموعة $\mathbb{C}$ نضع :

$$t(z) = z^2 - \sqrt{2}z + i\sqrt{3}$$

1. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $t(z) = -i\sqrt{3}$ ؛

ولیکن z_1 و z_2 حليها بحيث $\text{Im}(z_1) < 0$.
أ. حدد z_1 و z_2 .

ب. أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي .

ج. حدد مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية n بحيث : $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n \in \mathbb{R}$

2. المستوى العقدي (ρ) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$; (O, \vec{u}, \vec{v})$$

أ. نعتبر المجموعة : $E = \{M(z)/t(z) \in i\mathbb{R}\}$

بين أن E هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه ومقاربيه في المعلم
ب. $(O, \vec{u}, \vec{v})$

ب. لتكن (C) الدائرة التي مركزها النقطة Ω ذات اللق $\frac{\sqrt{2}}{2}$

وشعاعها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و M النقطة ذات اللق z و M' النقطة

ذات اللق $t(z)$. بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C)
فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يتم تحديد مركزها وشعاعها .

ج. أنشئ E و (C) و (C') في المعلم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

التمرين 17 : ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $0 \leq \theta < 2\pi$.
نضع : $p = 5 \cos(\theta) + 3i \sin(\theta)$

نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $z^2 - 2pz + 16 = 0$: (E) .

1. أ. تحقق أن : $p^2 - (3 \cos(\theta) + 5i \sin(\theta))^2 = 16$

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

نرمز ب z_1 و z_2 لحلي المعادلة (E) بحيث : $|z_1| < |z_2|$.

2. المستوى العقدي (ρ) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ ؛ نعتبر النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحاقهما على التوالي

هما z_1 و z_2 .

أ. بين أنه عندما يتغير العدد θ في المجال $[0, 2\pi[$ ، فإن النقطة M_1

تتغير على دائرة (C) ينبغي تحديد معادلة لها .

ب. لتكن P منتصف القطعة $[M_1 M_2]$. ولتكن (Γ) مجموعة

النقط P عندما يتغير العدد θ في المجال $[0, 2\pi[$.

بين أن (Γ) إهليلج بؤرتاه هما النقطتان F و F' اللتين لحاقهما

على التوالي هما 4 و -4 .

3. أ. بين أنه لكل عددين عقديين a و b من $\mathbb{C} - \{4\}$ ، لدينا :

$$\left(\frac{b+4}{b-4} = -\frac{a+4}{a-4}\right) \Leftrightarrow (ab=16)$$

ب. استنتج أن : $\frac{z_2+4}{z_2-4} = -\frac{z_1+4}{z_1-4}$

ج. بين أن : $[2\pi] \quad \overline{(M_1 F, M_1 F')} \equiv \pi + \overline{(M_2 F, M_2 F')}$

4. أ. بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (Γ) في النقطة P هي :

$$3x \cos(\theta) + 5y \sin(\theta) = 15$$

ب. بين أن المماس (T) عمودي على المستقيم $(M_1 M_2)$.

التمرين 18 :

1. حل في $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $z^2 + z + 1 = 0$

2. لكل عدد عقدي z حيث : $z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$

مع $-\pi \leq \theta \leq \pi$ و $\theta \neq \frac{2\pi}{3}$ و $\theta \neq -\frac{2\pi}{3}$ ؛

نضع : $z' = \frac{1}{z^2 + z + 1}$

أ. تحقق من أن : $1 + z + z^2 = z(1 + z + \bar{z})$

ب. أحسب معيار وعمدة z' بدلالة θ .

ج. نضع $z' = x + iy$ حيث x و y عدنان حقيقيان .

بين أن : $x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$

د. استنتج أن النقطة M ذات اللق z' ، تنتمي إلى هذلول يتم تحديد مركزه ورأسيه ومقاربيه .

التمرين 19 : المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ؛ ليكن a عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو :

$$a = \alpha + i\beta$$

1. لتكن (H) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق :

$$z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \quad (\bar{u} \text{ هو مرافق العدد العقدي } u)$$

أ. حدد طبيعة (H) .

ب. أنشئ (H) في الحالة : $a = 1 + i$

2. لتكن (C) مجموعة النقط M التي لحقها z يحقق :

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$$

أ. حدد طبيعة (C) .

ب. أنشئ (C) في الحالة : $a = 1 + i$

3. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، النظمة التالية :

$$(S): \begin{cases} z^2 - (\bar{z})^2 = a^2 - (\bar{a})^2 \\ (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases} \quad \text{ونضع : } u = z - a$$

أ. بين أن النظمة (S) تكافئ النظمة :

$$(S'): \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a(\bar{a})^2) = 0 \end{cases}$$

ب. نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi < \theta \leq \pi$.

حدد ؛ بدلالة r و θ ؛ ألق نقط تقاطع (C) و (H) .

ج. استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاث نقط هي رؤوس

لمثلث متساوي الأضلاع .

التمرين 20 : في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد

ممنظم ؛ نعتبر النقط I و A و M و M' التي لحاقها على التوالي :

1 و 2 و z و z' حيث z' و z عدنان عقديان .

1. بين أن المخروطي (H) ؛ ذا المعادلة $x^2 - y^2 - 2x = 0$ ؛

هذلول محددا رأسيه ومقاربيه .

2. بوضع : $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ حيث x و y و x' و y' أعداد حقيقية ؛ أوجد بدلالة x و y و x' و y' الجزء الحقيقي للعدد :

$$(z'-1)^2 + (z-1)^2 - 1$$

3. نفترض أن : $(z'-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ بحيث :

$$z \notin \{0, 1, 2\} \quad \text{و} \quad z' \notin \{0, 1, 2\}$$

أ. بين أنه إذا كان $M \in (H)$ فإن M' تنتمي إلى اتحاد مستقيمين

يجب تحديد معادلة ديكارتية لكل منهما .

$$IM'^2 = OM \times MA$$

ب. بين أن :

$$(\overline{OM}, \overline{IM'}) \equiv (\overline{IM'}, \overline{MA}) [2\pi]$$

و أن :

ج. بين أن :

$$MA^2 + MO^2 + 2IM'^2 = 2[z\bar{z} - (z + \bar{z}) + z'\bar{z}' - (z' + \bar{z}') + 3]$$

د. بين أن : $MA + MO = M'A + M'O$

التمرين 21 : نعتبر التطبيق f_a من $\mathbb{C} - \{a\}$ نحو $\mathbb{C} - \{a\}$

المعرف بما يلي : $f_a(z) = \frac{az}{z-a}$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$

1. بين أن : $f_a(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z|^2 \operatorname{Re}(a) = |a|^2 \operatorname{Re}(z)$

2. ليكن $z \in \mathbb{C} - \{a\}$

نضع : $r = |z-a|$ و $\arg(z-a) \equiv \theta [2\pi]$

أحسب $|f_a(z) - a|$ بدلالة r و $|a|$ ؛

وأحسب $\arg(f_a(z) - a)$ بدلالة θ و $\arg(a)$

3. نضع في ما يلي : $a = -1 + i$ و نعتبر في المستوى (ρ) المنسوب

إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ،

المجموعات : $(C) = \{M(z) / |f_a(z) - a| = 2\}$

و $(E) = \{M(z) / f_a(z) \in i\mathbb{R}\}$

و $(D) = \left\{M(z) / \arg(f_a(z) - a) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]\right\}$

أ. حدد كلا من (E) و (C) وبين أن (D) نصف مستقيم طرفه

$A(a)$ محروم من $A(a)$ محددا معادلة ديكارتية له .

ب. ليكن z_0 عنصرا من $\mathbb{C} - \{a\}$ والنقطة B ذات اللوح z_0

بحيث $B \in (D) \cap (C)$

أكتب $f(z_0)$ على الشكل الجبري ثم استنتج z_0 .

ج. أنشئ المجموعات (C) و (E) و (D) .

التمرين 22 : لتكن $U = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

1. بين أن : $-1 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ و $-1 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

2. ليكن $(a, b) \in U^2$.

أ. بين أن : $\frac{(a+b)^2}{ab} = a\bar{b} + \bar{a}b + 2$

ب. استنتج أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}$ عدد حقيقي موجب .

3. ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين .

نعتبر في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، النقطتين M_1 و M_2 اللتين لحقاهما على التوالي هما

z_1 و z_2 . وليكن t لحق النقطة G مرجح النظمة المترنة

نضع : $a = \frac{z_1}{|z_1|}$ و $b = \frac{z_2}{|z_2|}$. $\left\{\left(M_1, \frac{1}{|z_1|}\right); \left(M_2, \frac{1}{|z_2|}\right)\right\}$

أ. بين أن : $\frac{t^2}{z_1 z_2} = \frac{(a+b)^2}{ab} \times \frac{|z_1||z_2|}{(|z_1| + |z_2|)^2}$

ب. نفترض أن : $a+b \neq 0$.

بين أن المستقيم (OG) هو حامل منصف الزاوية الموجهة

$$(\overline{OM_1}, \overline{OM_2})$$

تطبيق : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما

$2+i$ و $-2+11i$. حدد معادلة ديكارتية لحامل

منصف الزاوية الموجهة $(\overline{OA}, \overline{OB})$.

التمرين 23 : المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

لكل z من $\mathbb{C}$ ؛ نضع $f(z) = z^2 - 2jz - 1$ حيث $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$.

2. ليكن التطبيق : $F : \rho \rightarrow \rho$

$$M(z) \mapsto M'(f(z))$$

ولتكن (C) الدائرة التي مركزها $A(j)$ وشعاعها r و (D) المستقيم

الذي يمر من A ومعامله الموجه $\tan(\theta)$ حيث $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

أ. تحقق من أن : $\forall z \in \mathbb{C} : f(z) - j = (z-j)^2$

ب. حدد طبيعة صورة كل من المجموعتين (C) و (D) بالتطبيق F .

التمرين 24 : المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

1. نعتبر التطبيق ρ المعرف على المجموعة $\mathbb{C}^*$ بما يلي :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* : \rho(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

أ. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $\rho(z) = i$.

ب. نضع $z = re^{i\theta}$ حيث : $r > 0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$.

عبر ؛ بدلالة r و θ ؛ عن الجزء الحقيقي وعن الجزء التخيلي

للعدد العقدي $\rho(z)$.

2. نعتبر التطبيق f من ρ^* نحو ρ الذي يربط كل نقطة $M(z)$

بالنقطة $M'(\rho(z))$. لتكن (C_r) الدائرة التي مركزها O

وشعاعها r .

أ. بين أن : $M(z) \in (C_r) \Leftrightarrow (\exists \theta \in [0, 2\pi]) / z = re^{i\theta}$
 ب. بين أن صورة الدائرة (C_r) بالتطبيق f توجد ضمن مخروطي (E_r) يجب تحديد معادلة مختصرة له , ثم استنتج أن (E_r) إهليلج
 بورتاه $F(1)$ و $F'(-1)$.

3. لنكن $M(z)$ نقطة من (E_r) و $M'(z')$ نقطة من المستوى ρ
 بحيث : $z'^2 + z^2 = 1$.

أ. بين أن : $OM'^2 = MF \times MF'$

(لا حظ أن : $z'^2 = (1-z)(1+z)$)

ب. استنتج أن : $2\arg(z') \equiv \arg(1-z) + \arg(-1-z) + \pi [2\pi]$.

ج. استنتج أن نصف المستقيم $[OM')$ عمودي على منصف الزاوية الموجهة $(\overline{MF}, \overline{MF'})$.

د. بين أن : $(MF + MF')^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2 + 1)$

ثم استنتج أن النقطة $M'(z')$ تنتمي إلى الإهليلج (E_r) .

أحسب بدلالة r المجموع : $|z|^2 + |z'|^2$.

التمرين 25 :

1. أ. حل المعادلة $z \in \mathbb{C} : z^2 + (1+i)z + 2i = 0$

نعتبر التطبيق P حيث : $P(z) = z^3 + 2 - 2i$

أحسب $P(1+i)$ واستنتج تعميلا ل $P(z)$ ثم أعط؛ على شكلهما

الجبري ؛ حلي المعادلة $P(z) = 0 : z \in \mathbb{C}$.

ب. أعط على شكل مثلثي الجذور المكعبة للعدد العقدي $-2 + 2i$

ج. استنتج مما سبق $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. أ. أثبت أنه توجد ثلاث متتاليات هندسية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ للأعداد العقدية

بحيث $u_3 = -i$ و $u_6 = 2 + 2i$ (أحسب الأساس q و الحد

الأول u_0 لكل متتالية من المتتاليات المحصل عليها)

ب. لنكن $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العقدية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} z_0 = \frac{1}{4}(-1+i) \\ z_{n+1} = (1+i)z_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

✓ أحسب z_n بدلالة n .

✓ أكتب z_n على شكل مثلثي .

✓ حدد قيم العدد الصحيح n لكي يكون z_n حقيقيا .

التمرين 26 :

1. أ. أحسب $(3 + \sqrt{3}i)^2$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة :

$$Z^2 + 2(1 - \sqrt{3}i)Z - 8(1 + \sqrt{3}i) = 0$$

2. نرمز بالأعداد z_1 و z_2 و z_3 و z_4 لحلول المعادلة :

$$(E) : z \in \mathbb{C}, \quad z^4 + 2(1 - \sqrt{3}i)z^2 - 8(1 + \sqrt{3}i) = 0$$

أ. أكتب على الشكل الجبري حلول المعادلة (E) .

ب. أحسب z_1^6 و z_2^6 و z_3^6 و z_4^6 .

3. أ. أحسب $(\sqrt{3} - i)^3$ و $(-8i)^2$.

ب. حدد على الشكل الجبري حلول المعادلة :

$$z \in \mathbb{C} : z^6 + 64 = 0$$

التمرين 27 : لكل عدد عقدي z مخالف للعدد -1 ؛ نضع :

$$f(z) = \frac{iz - 1}{(z + 1)^2}$$

1. أ. حدد العدد الحقيقي y بحيث : $f(iy) = iy$.

ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = z$: (E) .

نرمز ب z_0 و z_1 و z_2 لحلول المعادلة (E) حيث :

$$\operatorname{Re}(z_1) > \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{و} \quad \operatorname{Re}(z_0) = 0$$

2. أ. تحقق أن : $z_1 + 1 = e^{i\frac{11\pi}{6}}$ و $z_2 + 1 = e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

ب. استنتج الكتابة المتثلثية لكل من العددين z_1 و z_2 .

3. في هذا السؤال نفترض أن $z = e^{i\alpha}$ حيث $0 \leq \alpha < \pi$.

أ. بين أن : $\overline{f(z)} = izf(z)$.

ب. حدد α إذا علمت أن : $f(z) + \overline{f(z)} = 0$.

ج. أكتب $f(z)$ على الشكل $re^{i\varphi}$ حيث :

$$(r, \varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

$$4. \text{ حدد } z \text{ إذا علمت أن : } \begin{cases} |z| = 1 \\ \operatorname{Re}(f(z)) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

التمرين 28 : في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ ؛ نعتبر المنحنى (C_m) الذي معادلته هي :

$$\frac{x^2}{10-m} + \frac{y^2}{2-m} = 1 \quad ; \quad m \in \mathbb{R} \setminus \{2, 10\}$$

I. 1. ناقش حسب قيم m ؛ طبيعة المنحنى (C_m) .

2. إذا كان (C_m) مخروطيا ؛ أعط عناصره المميزة .

(المركز ؛ البورتان ؛ المقاربان إن وجدا)

3. أرسم (C_1) .

II. نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : z^2 - (6\cos(\alpha))z + 1 + 8\cos^2(\alpha) = 0$$

حيث : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

لنكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) و $\Im m(z_1) > 0$ و M_1 و M_2

النقطتين ذات اللحقين z_1 و z_2 على التوالي .

2. أ. تحقق أن : $M_1 \in (C_1)$.

ب. بين أنه توجد نقطتان P_1 و P_2 من (C_1) حيث يكون فيهما

المماس للمنحنى (C_1) مولزيا للمستقيم (OM_1) .

ج. تحقق أن : $OM_1^2 + OP_1^2 = OM_2^2 + OP_2^2$.

