التمرين الأول : كيفية إنشاء خماسي منتظم

ليكن (A_0,A_1,A_2,A_3,A_4) مضلعا منتظما. نعتبر O مركزه ، ونعتبر معلما متعامدا ممنظما $(O,\vec{u},\vec{v})$ بحيث $\vec{u}=\overrightarrow{OA_0}$.

1. أ- حدد ω_0 و ω_1 و ω_2 و ω_3 و ω_4 على التوالي ألحاق النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4.

ب- بين أن : $\forall k\in\{0,1,2,3,4\}\ ,\ \omega_k=\omega_1^k$.

جـ- بين أن : $1+\omega_1+\omega_1^2+\omega_1^3+\omega_1^4=0$.

2. أ- استنتج أن $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ هو أحد حلي المعادلة :

$$4z^2+2z-1=0$$

ب- استنتج قيمة $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

3. لتكن B النقطة ذات اللحق -1 . أحسب المسافة BA_2 بدلالة $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ ثم بدلالة $\sqrt{5}$.

(لاحظ أن : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$)

4. نعتبر النقطة I ذات اللحق $\frac{i}{2}$. لتكن الدائرة $\mathscr{C}\left(I,\frac{1}{2}\right)$ التي مركزها I وشعاعها $\frac{1}{2}$ ، ولتكن J نقطة تقاطع الدائرة $(\mathscr{C})$ ونصف المستقيم $[BI)$. أحسب المسافتين BI و BJ.

5. **تطبيق :** باستعمال المسطرة والمزواة فقط، أنشئ خماسيا منتظما. علل جوابك.

التمرين الثاني :

في المستوى العقدي $\mathscr{P}$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين $A(i)$ و $A'(-i)$ والتطبيق F المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} F & : & \mathscr{P}\setminus\{A(i)\} & \to & \mathscr{P}\setminus\{A(i)\} \\ & & M(z) & \mapsto & M'(f(z)) \end{array}$$

حيث $f(z)=\frac{iz}{z-i}$ لكل z من $\mathbb{C}\setminus\{i\}$.

1. حدد النقط الصامدة بالتطبيق F.

2. بين أن F تقابل من $\mathscr{P}\setminus\{A(i)\}$ نحو $\mathscr{P}\setminus\{A(i)\}$ محددا تقابله العكسي.

3. أ- بين أن : $f(z)\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ |z|^2=\Im m(z)$

وأن : $f(z)\in i\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\ \overline{z}=-z$

ب- استنتج طبيعة المجموعتين التاليتين :

$$(\mathscr{D})=\{M(z)\in\mathscr{P}\ /\ f(z)\in i\mathbb{R}\}$$

$$(\mathscr{E})=\{M(z)\in\mathscr{P}\ /\ f(z)\in\mathbb{R}\}\ \text{ و }$$

4. أ- تحقق من أن : $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}\ ,\ f(z)-i=\frac{-1}{z-i}$.

ب- استنتج صورة الدائرة (Γ) التي مركزها $A(i)$ وشعاعها R بالتطبيق F.

جـ- نعتبر النقط $M(z)$ و $M'(f(z))$ و $N(\overline{z})$ بين أن : $(AM')//(A'N)$.

5. نضع $z=e^{i\theta}$ حيث $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

أ- حدد الشكل المثلثي ل $f(z)$.

ب- استنتج أنه عندما يتغير θ على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ ، فإن $M'(f(z))$ يتغير على منحنى يتم تحديده.

6. ليكن n من $\mathbb{N}^*$. نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ (z-i)^n=(iz)^n$.

أ- بين أن صور حلول المعادلة (E_n) نقط مستقيمية.

ب- بين أن حلول المعادلة (E_n) تكتب على شكل :

$$z_k=\frac{1}{2}\left(-\tan\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)+i\right)$$

حيث : $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$

7. من اجل $p\in\mathbb{N}$ ، نضع :

$$P(z)=(z-i)^{4p+1}-(iz)^{4p+1}$$

أ- بين أن P حدودية محددا درجتها ومعامل حدها الأكبر درجة.

ب- بين أن : $P(z)=(1-i)\prod_{k=0}^{4p}(z-z_k)$.

جـ- استنتج أن : $\prod_{k=0}^{4p}z_k=\frac{-1+i}{2}$.

د- حدد قيمة الجداء $\prod_{k=0}^{4p}\cos\left(\frac{k\pi}{n}+\frac{\pi}{4}\right)$.