التمرين الأول :

لتكن $\mathbb{R}_2[x]$ مجموعة الدوال الحدودية التي درجتها أصغر من أو تساوي 2 . نعتبر الدوال الحدودية المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f(x)=x^2+x \ ; \ g(x)=x+1$$
$$h(x)=x^2+1$$

1. بين أن $\mathscr{B}=(f,g,h)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}_2[x],+,.)$.

2. لتكن f_1 و g_1 و h_1 الدوال الحدودية المعرفة بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f_1(x)=2x^2+x+1$$
$$g_1(x)=-x^2+3x+2$$
$$h_1(x)=2x+3$$

أ- حدد إحداثيات كل من f_1 و g_1 و h_1 بالنسبة للأساس $\mathscr{B}$.

ب- بين أن $\mathscr{B}_1=(f_1,g_1,h_1)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}_2[x],+,.)$

التمرين الثاني :

نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{ M_{(a,b,c)}=\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3 \right\}$$

نضع : $I=M_{(1,0,0)}$ و $J=M_{(0,1,0)}$ و $K=M_{(0,0,1)}$.

1. أ- أحسب $M_{(a,b,c)}$ بدلالة I و J و K و a و b و c.

ب- بين أن : $J^2=K$ و $K^2=J+K$

$J\times K=K\times J=I+J$.

2. بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية.

3. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي محددا بعده.

4. تحقق من أن $J^3=I+J$ وحدد J^{-1}.

التمرين الثالث :

$\left(\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),+,.\right)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$.

لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ولكل $x\in\mathbb{R}_+^*$ ، نضع : $f_{(a,b)}(x)=x^a e^{bx}$ و $\varphi_{(a,b)}(x)=\ln\left(f_{(a,b)}(x)\right)$.

لتكن المجموعة : $F=\left\{ \varphi_{(a,b)} \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$.

1. بين أن $(F,+)$ زمرة جزئية للزمرة $\left(\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R}),+\right)$

2. أ- تحقق من أن :

$\forall \varphi_{(a,b)}\in F \ , \ \forall \lambda\in\mathbb{R} \ , \ \lambda.\varphi_{(a,b)}\in F$.

ب- استنتج أن $(F,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

جـ- بين أن $\left(\varphi_{(0,1)};\varphi_{(1,0)}\right)$ أساس للفضاء المتجهي $(F,+,.)$، ثم حدد بعد F.

التمرين الرابع :

حل النظمة التالية بتطبيق طريقة كوص :

$$\begin{cases} x+y+z+t=-\dfrac{13}{2} \\ 4x+3y+2z+t=0 \\ 8x+4y+2z+t=-2 \\ 32x+12y+4z+1=0 \end{cases} \qquad (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$$

التمرين الخامس :

نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{ (x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x+y-t=0 \right\}.$$

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. حدد أساسا للفضاء $(E,+,.)$، ثم استنتج بعد E.

3. لتكن $\vec{u}(2,0,0,2)$ و $\vec{v}(0,-1,0,-1)$ و $\vec{w}(0,1,1,1)$. بين أن الأسرة $\mathscr{B}=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ أساس للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.

التمرين السادس :

حدد محددة ومقلوب المصفوفتين التاليتين في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ و } B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$