التسعين الأول : نعتبر المجموعة :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} / a^2 + b^2 = 1 \text{ و } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. بين أن : $G \neq \emptyset$.

$$2. \text{ بين أن : } G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

3. بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

4. هل G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ ؟

$$5. \text{ لكل } \theta \text{ من } \mathbb{R} \text{ ، نضع : } M_{(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

أحسب $M_{(\theta)}^2$ و $M_{(\theta)}^3$ ، ثم أحسب $M_{(\theta)}^n$ لكل θ من $\mathbb{R}$

ولكل n من $\mathbb{N}^*$ ، حيث :

$$M_{(\theta)}^n = \underbrace{M_{(\theta)} \times M_{(\theta)} \times \dots \times M_{(\theta)}}_{n \text{ مرة}}$$

6. نعتبر التطبيق f المعرفة من $\mathbb{R}$ نحو G بما يلي :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$\theta \mapsto f(\theta) = M_{(\theta)}$$

أ- بين أن f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R}, +)$ نحو $(G, \times)$.

ب- ما هي بنية المجموعة $(G, \times)$ ؟

$$7. \text{ نعتبر المجموعة } U = \{ z \in \mathbb{C}^* / |z| = 1 \}$$

$$\text{أ- بين أن : } U = \{ e^{i\theta} / \theta \in \mathbb{R} \}$$

ب- بين أن $(U, \times)$ زمرة تبادلية.

8. بين أنه يوجد تشاكل من $(U, \times)$ نحو $(G, \times)$.

التسعين الثاني : لتكن $(G, *)$ زمرة تبادلية وليكن f تقابلا

من G نحو مجموعة H . لكل $(x, y) \in H^2$ ، نضع :

$$x \top y = f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))$$

1. بين أن $\top$ قانون تركيب داخلي في H .

2. أ- بين أن f تشاكل من $(G, *)$ نحو $(H, \top)$.

ب- حدد بنية $(H, \top)$.

3. ليكن $a \in \mathbb{R}$ باعتبار $(\mathbb{R}, +) = (G, *)$ و

$$f : G \rightarrow H$$

$$x \mapsto x + a$$

بين أن القانون Δ المعرفة بما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \Delta y = x + y - a$$

يحول $\mathbb{R}$ بنية زمرة تبادلية.

4. نضع :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \perp y = (x - a)(y - a) + a$$

بين أن $(\mathbb{R}, \Delta, \perp)$ جسم تبادلي.

التسعين الثالث :

لتكن $\mathcal{M}$ مجموعة المصفوفات M من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث :

$$2M^2 - 3M + I_2 = O_2$$

$$\text{حيث : } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. لتكن M مصفوفة من $\mathcal{M}$.

$$\text{نضع : } E = 2(I_2 - M) \text{ و } F = 2M - I_2$$

أ- بين أن : $E \times F = O_2$.

ب- بين أن : $E^2 = E$ و $F^2 = F$.

$$\text{ج- بين أن : } M^n = \frac{1}{2^n} E + F \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المرفقتين بما

$$\begin{cases} x_0 = y_0 = 1 \\ x_{n+1} = 3x_n - 10y_n ; n \in \mathbb{N} \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - \frac{3}{2}y_n ; n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ يلي :$$

$$\text{أ- بين أن المصفوفة } A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ تنتمي إلى } \mathcal{M} .$$

$$\text{ب- نضع : } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

بين أن : $X_{n+1} = A \cdot X_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج- بين أن : $X_n = A^n \cdot X_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

د- حدد تعبير x_n و y_n بدلالة n .

هـ- أدرس تقارب المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.