الثانية بكالوريا علوم رياضية	السلسلة 20 : البنيات الجبرية	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

I لكل x و y من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ، نضع :

$$x * y = x + y - 2xy$$

1. بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.
2. بين أن القانون $*$ تبادلي وتجميعي .
3. بين أن : $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ زمرة تبادلية .
4. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$$\underbrace{x * x * \ldots * x}_{n \text{ مرة}} = \frac{1}{2}\left[1-(1-2x)^n\right]$$

II لكل x من $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ، نضع :

$$A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}$$

ونعتبر المجموعة : $E=\left\{A(x)\ /\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

1. بين أن E جزء مستقر من $\left(\mathrm{M}_3(IR),\times\right)$.
2. نعتبر التطبيق :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\} & \to & E \\ & & x & \mapsto & A(x)\end{array}$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $\left(\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\},*\right)$ نحو $(E,\times)$.

ب- استنتج بنية $(E,\times)$.

جـ- ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و $B=A\left(-\frac{1}{2}\right)$. بين أن :

$$B^n=A\left(\frac{1-2^n}{2}\right) \text{ و } \left(B^n\right)^{-1}=A\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

التمرين 2 :

لكل $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ ، نعتبر المصفوفة

$$M(a,b)=\begin{pmatrix}a & b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2} & a\end{pmatrix}$$

في $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ، نعتبر E مجموعة المصفوفات التالية :

$$E=\left\{M_{(a,b)}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})\ /\ a^2-2b^2=1\right\}$$

1. نضع : $A=\begin{pmatrix}3 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$.

تحقق من أن A تنتمي إلى E .

2. أ- بين أن E جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$ ، وأن القانون $\times$ تبادلي في E .

ب- بين أن جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$.

جـ- بين أن $(E,\times)$ زمرة تبادلية .

3. نضع : $A^0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ولكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع :

$$A^{n+1}=A^n\times A .$$

نعتبر المجموعة : $G=\left\{A^n\ /\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

أ- تحقق من أن : $G\subset E$.

ب- لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة لعملية $\times$ في E . بين أن : $H=\left\{B^n\ /\ n\in\mathbb{N}\right\}$ حيث :

$$B=\begin{pmatrix}3 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 3\end{pmatrix}$$

جـ- بين أن $G\cup H$ زمرة جزئية من $(E,\times)$.

التمرين 3 :

$\left(\mathscr{M}_2,+,\times\right)$ و $\left(\mathscr{M}_2,+,.\right)$ يرمزان على التوالي إلى الفضاء المتجهي الحقيقي والحلقة للمصفوفات المربعة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الحقيقية . نضع : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}$.

لتكن E المجموعة المعرفة كما يلي :

$$E=\left\{M\in\mathscr{M}_2\ /\ \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\ M=aI+bA\right\}$$

1. أ- بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $\left(\mathscr{M}_2,+\right)$.

ب- أثبت أن E جزء مستقر من $\mathscr{M}_2$ بالنسبة لضرب مصفوفة في عدد حقيقي .

جـ- استنتج أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

2. ليكن $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ و a و b عددين حقيقيين حيث : $(a,b)\neq(0,0)$. بين أن :

$$(x,y)=(0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}ax-2by=0\\bx+(a-2b)y=0\end{cases}$$

3. $(\mathbb{C}^*,\times)$ هي زمرة الأعداد العقدية غير المنعدمة ، ونضع :

$$E^*=E-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$$

أ- تحقق من أن : $A^2=-2(I+A)$.

ب- بين أن: $\forall(M,M')\in(E^*)^2$: $M\times M'\in E^*$

جـ- ليكن h التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعرف كما يلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\ ,\ h(a+ib)=(a+b)I+bA$$

α- بين أن h تقابل من $\mathbb{C}^*$ على E^* .

β- أثبت أن h تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ على $(E^*,\times)$.

γ- استنتج بنية $(E^*,\times)$.

التمرين 4 :

نعتبر المجموعة E المكونة من المصفوفات $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a+b\end{pmatrix}$ حيث a و b عددان حقيقيان و I و J المصفوفتان حيث :

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{و}\quad J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$$

1. أ- بين أن : $(E,+)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

ب- أثبت أنه : $\forall\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \forall M\in E\ ,\ \alpha.M\in E$.

جـ- استنتج أن : $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

د- بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي E .

2. أ- تحقق من أن : $J^2=-I+J$.

ب- بين أن E مستقر في $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

جـ- أثبت أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية .

التمرين 5 :

I لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ، نعتبر المصفوفة :

$$M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}a+b&-b\\b&a\end{pmatrix}$$

في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ، لتكن ξ مجموعة المصفوفات الآتية :

$$\xi=\left\{M_{(a,b)}\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية .

1. بين أن ξ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$ ومن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2. بين أن $(\xi,+,\times)$ حلقة تبادلية وواحدية .

3. أ- بين أنه لكل عددين حقيقيين x و y ، لدينا :

$$(x^2+xy+y^2=0)\Leftrightarrow(x=y=0)$$

ب- حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $(\xi,+,\times)$.

جـ- استنتج أن $(\xi,+,\times)$ جسم تبادلي .

II ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

1. بين أن $(1,\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,.)$.

2. نعتبر التطبيق ψ من ξ نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rcl}\psi:\xi&\to&\mathbb{C}\\M_{(a,b)}&\mapsto&a+\sigma b\end{array}$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $(\xi,+)$ نحو $(\mathbb{C},+)$.

3. نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-z+1=0$.
حل في مجموعة الأعداد العقدية هذه المعادلة وأكتب حليها على الشكل المثلثي .

4. نفترض في هذا السؤال أن : $\sigma=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

بين أن ψ تشاكل من $(\xi,\times)$ نحو $(\mathbb{C},\times)$.

التمرين 6 :

ليكن $\theta\in]0,\pi[$.

1. نعرف التطبيق f_θ من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{array}{rcl}f_\theta:\mathbb{R}^2&\to&\mathbb{R}\\(x,y)&\mapsto&x^2+2(\cos\theta)xy+y^2\end{array}$$

بين أن : $(x,y)\neq(0,0)\Leftrightarrow f_\theta(x,y)>0$

2. نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{M(x,y)=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x+y\end{pmatrix}\ /\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

أ- بين أن E جزء مستقر بالنسبة للجمع والضرب في $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

ب- بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية واحدية . هل هي كاملة ؟

جـ- بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي .