

الثانية بكالوريا علوم رياضية	دراسة الدوال اللوغاريتمية والدوال الأسية	الأستاذ : الحيان	
التمرين الأول : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-1} \frac{\ln(x)}{2} ; & x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$ وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1. بين أن f دالة متصلة على المجال $]0, +\infty[$. 2. أحسب $f'(x)$ لكل $x \in]0, 1[$ ولكل $x \in]1, +\infty[$ ، ثم أدرس رتابتها على كل من هذين المجالين. 3. بين أن لكل $x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$ 4. أ- بين أن لكل $x \in]0, +\infty[$ لدينا : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ب- استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 1 وحدد $f'(1)$. ج- بين أن f' متصلة على المجال $]0, +\infty[$. 5. أ- بين أن : $\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[: \ln(x) < (x-1)$ ب- استنتج أن : $\forall x \in]1, +\infty[: f(x) < x$. 6. أنشئ $(\mathcal{C}_f)$. التمرين الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kx}{n}}$ 1. أحسب $f(0)$. 2. بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$. 3. هل الدالة متصلة في 0 ؟ 4. لكل $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k e^{\frac{kx}{n}}$			أحسب $g(0)$. 5. لتكن h الدالة العددية المعرفة كما يلي : $\forall t \in [0, +\infty[: h(t) = e^{\sqrt{t}} - \sqrt{t}$ أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$. باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية، بين انه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0, x^2[$ بحيث : $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{\sqrt{c}} - 1}{\sqrt{c}} \right)$ ب- استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين 0 وأحسب $f'_d(0)$. التمرين الثالث : الجزء الأول : 1. نعتبر الدالة العددية u المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $u(x) = (2-x)e^x - 2$ 1. أدرس تغيرات الدالة u. 2. بين أن المعادلة $u(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين في $\mathbb{R}$. نرسم للحل الغير المنعدم α. تحقق من أن : $1 < \alpha < 2$ 3. استنتج إشارة $u(x)$ على $\mathbb{R}$. II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} ; & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ وليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1. بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$. 2. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$. 3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة. 4. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، و بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^* : f'(x) = \frac{x u(x)}{(e^x - 1)^2}$ 5. ضع جدول تغيرات الدالة f.

6. أنشئ: $(\mathcal{E})$. (نعطي : $\alpha \approx 1,6$)

الجزء الثاني :

لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1. بين أن F متصلة وتزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$.

2. لكل $x \in \mathbb{R}^+$ ، نضع : $G(x) = \int_{\ln 2}^x t^2 e^{-t} dt$

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، أحسب $G(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$.

ب- بين أن : $\forall t \in [\ln 2, +\infty[: f(t) \leq 2 t^2 e^{-t}$

ج- استنتج أن F مكبورة على $\mathbb{R}^+$. نقبل أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L$

وأن $L \in \mathbb{R}$

الجزء الثالث :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

1. بين أن لكل $x > 0$ ، لدينا :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \frac{e^{-nx}}{e^x - 1}$$

2. بين أن : $\forall x > 0 : 0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq \frac{\alpha(2-\alpha)}{n}$

3. أحسب : $I_n(x) = \int_0^x t^2 e^{-nt} dt$ لكل $x \in [0, +\infty[$

4. استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{2}{n^3}$

1. بين أن لكل $x \in [0, +\infty[$ ، لدينا :

$$F(x) = \sum_{k=1}^{k=n} I_k(x) + \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$$

2. لتكن h_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$h_n(x) = \int_0^x f(t) e^{-nt} dt$$

بين أن الدالة h_n تقبل نهاية منتهية I_n ، عندما يؤول x إلى $+\infty$ ،

وأن : $L - I_n = 2 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} \right)$

3. بين أن $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة وأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

4. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي :

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3}$$

بين أن $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متتالية متقاربة وأن نهايتها L' تحقق ما يلي :

$$L = 2L'$$

التمرين الرابع :

لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال

$$]0, +\infty[\text{ بما يلي : } f_n(x) = n x + \ln(x)$$

1. بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_n في $\mathbb{R}$ ،

وأن $x_n \in]0, 1]$

2. أ- بين أن : $f_{n+1}(x) > f_n(x) : \forall x \in]0, +\infty[$

ب- استنتج أن : $f_{n+1}(x_n) > 0$ ، وأن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية

تناقصية.

3. أ- بين أن $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

نضع : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = l$

ب- بين أن : $l \notin]0, 1]$

ج- استنتج أن : $l = 0$

4. أ- بين أنه إذا كان $n \geq 3 > e$ ، فإن : $x_n > \frac{1}{n}$

ب- أدرس إشارة $x - \ln(x)$ ، واستنتج أن : $x_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$

ج- ماذا تستنتج ؟

التمرين الخامس :

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نضع :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt$$

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt \text{ و } u_1$$

1. أحسب u_0 و u_1

2. بين أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تزايدية .

3. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$

ب- أحسب $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt$. ماذا تستنتج ؟

4. أ- تحقق من أن :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt$$

ب- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{1+n}$

ج- أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

بسم الله الرحمن الرحيم
الحمد لله رب العالمين
والصلاة والسلام على
سيدنا محمد وآله الطيبين
الطاهرين