

. $\|i\| = \|j\| = 2cm$ الوحدة . $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- بين أن f متصلة على اليمين في 0.

ب- بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

ج- بين أن f ترايدية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$.

2. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب- بين أن : $\forall t \geq 0 : 0 \leq e^{-t} + t - 1 \leq \frac{t^2}{2}$

ج- بين أن :

$\forall x > 0 : -\frac{4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$

د- استنتج أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارباً مائلاً (Δ) ينبغي تحديد معادلة له.

3. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) .

II. n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right) e^{-\frac{2}{x}} ; & x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1. بين أن f_n قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

2. أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0, +\infty[$.

3. أ- بين أن، لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، المعادلة $f_n(x) = \frac{2}{n}$ تقبل حلاً

وحيداً a_n في المجال $]0, +\infty[$.

ب- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) , (\forall x > 0)$:

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

ج- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ تناقصية، ثم بين أن $(a_n)_{n \geq 1}$

متقاربة. نضع : $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

د- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$

هـ- بين أن : $a = 0$.

3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{1}{\ln x}} ; & x \neq 0, x \neq 1 \\ f(0) = 1 ; & f(1) = 0 \end{cases}$$

1

ليكن n عدداً صحيحاً طبعياً أكبر من أو يساوي 2. نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$$

ليكن $(\mathcal{E}_n)$ التمثيل المبياني للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{E}_n)$.

2. أحسب $f'_n(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f_n .

3. أ- بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}$.

ب- بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$

ج- بين أن : $\forall x \in \mathbb{R} : e^x \geq x + 1$ ، ثم استنتج أن :

$$f_n(1) > 0$$

د- بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

4. أنشئ المنحنى $(\mathcal{E}_2)$. (نأخذ : $\alpha_2 \approx 0,6$)

5. أ- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 2، لدينا :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{n}{n+1} e^{-(n+1)\alpha_n} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

ب- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$

ج- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية، ثم استنتج أنها متقاربة.

6. أ- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$

ب- استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} : \frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$$

ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.

2

1. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{-\frac{2}{x}} ; & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ منحناها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

ليكن $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \bar{i}, \bar{j})$.

1. أدرس الاتصال على اليمين ثم الاشتقاق على اليمين للدالة f عند النقطة 0.

2. أ- أدرس الاتصال على اليسار ثم الاشتقاق على اليسار للدالة f عند النقطة 1.

ب- هل الدالة f متصلة عند النقطة 1 ؟

3. أدرس تغيرات الدالة f .

4. أ- بين أن المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل المستقيم (D) ذي المعادلة $y = x$ كمحور تماثل.

ب- حدد نقط تقاطع المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (D) .

ج- أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$.

4 :

ليكن m عددا حقيقيا سالبا قطعيا و f_m الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_m(x) = \frac{1}{x} e^{\left(\frac{mx}{x-1}\right)} ; & x \neq 1 \\ f_m(1) = 0 \end{cases}$$

1. أ- أحسب نهايات f_m عند محداث $\mathbb{R}^*$.

ب- أدرس اتصال f_m في النقطة 1 على اليمين وعلى اليسار.

ج- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_m في النقطة 1 على اليمين.

2. أ- بين أنه :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{1\} : f'_m(x) = -\frac{x^2 + (m-2)x + 1}{x^2(x-1)^2} e^{\left(\frac{mx}{x-1}\right)}$$

ب- أثبت أن $f'_m(x)$ تنعدم من أجل قيمتين x_1 و x_2 تحققان

$$0 < x_1 < 1 < x_2$$

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f_m .

(حساب $f_m(x_1)$ و $f_m(x_2)$ غير مطلوب)

3. نضع في كل ما يلي : $f_{-\frac{1}{2}} = f$.

أ- أرسم المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم . (وحدة القياس 2cm)

$$\left(\sqrt{e} \approx 1,65 \text{ و } \frac{1}{e} \approx 0,4 \right)$$

(تحديد نقط الإنعطاف غير مطلوب)

ب- نضع لكل عدد حقيقي x من المجال $[2, +\infty[$:

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$$

(i) بين أن F قابلة للاشتقاق على $[2, +\infty[$ وأحسب $F'(x)$.

(ii) أثبت أنه : $e^{\left(\frac{-x}{2x-2}\right)} < e^{\left(\frac{-x}{2x-1}\right)} : \forall x \in [2, +\infty[$.

واستنتج أن F تزايدية قطعيا على المجال $[2, +\infty[$.

(iii) أثبت أنه :

$$\forall x \in [2, +\infty[: x f(2x) \leq F(x) \leq x f(x)$$

(iv) استنتج أنه :

$$\forall x \in [2, +\infty[: \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3}} \leq F(x) \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

5 :

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس تغيرات الدالة f ؛ واستنتج إشارة f على $\mathcal{D}_f$.

II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي : $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1. حدد $\mathcal{D}_g$ حيز تعريف الدالة g .

2. أدرس تغيرات الدالة g .

3. بين أن : $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e : \forall n \in \mathbb{N}^*$

4. استنتج أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \left(\frac{n+1}{e}\right)^n \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

5. ليكن $a \in \mathbb{R}$. استنتج مما سبق النهاية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!}$.

III. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ نعتبر الدالة h_n المعرفة بما يلي :

$$h_n(x) = -e^{-x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

1. حدد الدالة المشتقة للدالة h_n .

2. ليكن a عنصرا من $\mathbb{R}^*$. باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية

للدالة h_n ما بين 0 و a ؛ بين أن :

$$\left|1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} - e^a\right| \leq e^{|a|} \times \frac{|a|^n}{n!}$$

3. استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!}$.

$$\forall x \in [0, +\infty[: \frac{x^2}{2} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x$$

ثم أحسب النهاية التالية : أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.