| الثانية بكالوريا علوم رياضيـــــــة | سلسلـــــــة تماريـــــــــن رقم 8 | الأستـــــاذ : الحيـــــان |
|---|---|---|

## التمرين 1 :

**الجزء الأول :** لتكن $\varphi$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathscr{D}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ بما يلي :

$$\forall x\in\mathscr{D}\ :\ \varphi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$$

1. أدرس تغيرات الدالة $\varphi$ ، ثم استنتج أن :

$$\forall x\in\mathscr{D}\ :\ \varphi(x)>0$$

2. باستعمال ، مبرهنة التزايدات المنتهية، على الدالة $\ln$ على المجال $[x,x+1]$ ، بين من جديد أن :

$$\forall x\in\mathscr{D}\ :\ \varphi(x)>0$$

**الجزء الثاني :** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathscr{D}\cup\{0\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & ;\quad x\neq 0 \\ f(0)=0 & \end{cases}$$

1. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة $f$ على اليمين في 0 .
2. أحسب نهايات $f$ عند محدات المجموعة $\mathscr{D}\cup\{0\}$.
3. أحسب $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathscr{D}$ ، ثم أعط جدول تغيرات $f$.
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ .
5. لتكن $g$ الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$g(x)=f(-1-x)$$

أ- حدد $\mathscr{D}_g$ حيز تعريف الدالة $g$ .

ب- بين أن المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $(\Delta)\ :\ x=-\frac{1}{2}$، معللا جوابك.

جـ- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم السابق.

د- بين مبيانيا أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ f(n)<1<g(n)$.

هـ- استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

6. أ- بين أن $f$ تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال $J$ ينبغي تحديده.

ب- حل في $\mathbb{R}^+$ المعادلة $f(x)=f^{-1}(x)$.

## التمرين 2 :

لتكن $f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\ln\left[\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2\right]$$

1. حدد $\mathscr{D}$ حيز تعريف الدالة $f$ ، وأدرس قابلية اشتقاق $f$ على اليمين في النقطة 1 . ( يمكن وضع $t=\sqrt{x-1}$ ) . أعط تأويلا مبيانيا للنتيجة .
3. أدرس تغيرات الدالة $f$ .
4. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ بالنسبة لمعلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

أ-أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ .

ب- أدرس تقعر $(\mathscr{C}_f)$ . (يتم تحديد إحداثيتي نقطة انعطاف $(\mathscr{C}_f)$ ).

جـ- أعط معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطته ذات الأفصول 5.

د- أرسم $(\mathscr{C}_f)$ و $(T)$ . ( نأخذ : 1cm كوحدة قياس ).

## التمرين 3 :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة بما يلي :

$$f(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{1-x}\right|$$

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوى $P$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

I- 1. حدد $\mathscr{D}_f$ حيز تعريف الدالة $f$ .

2. بين أن الدالة $f$ فردية .

3. أحسب النهايات التالية :

$$i)\ :\ \lim_{x\to 1}f(x)\quad ;\quad ii)\ :\ \lim_{x\to+\infty}f(x)+x$$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما .

II- 1. أدرس تغيرات $f$ ، وأعط جدول التغيرات .

2. أ- بين أن : $\forall x>0:\ \ln(1+x)-x<0$ .

ب- بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الأفاصيل في نقطة $\Omega$ أفصولها $x_0$ بحيث: $1{,}1<x_0<\sqrt{2}$. ( نذكر أن $e<3$ )

3. أدرس تقعر المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ .

4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ .

III- نضع لكل $n\in\mathbb{N}^*$ : $u_n=\dfrac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$ و $v_n=\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ .

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ v_n=\dfrac{f(x_n)}{x_n}$؛

حيث : $x_n=\dfrac{1}{2n+1}$ .

ب- استنتج رتابة المتتالية العدية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ .

جـ- بين أن المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة .

## التمرين 4 :

**الجزء الأول :** نعتبر الدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=1-x\ln x \quad ; \quad x>0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

1. أ- تحقق أن الدالة $g$ متصلة على اليمين في 0 .

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ .

جـ- أدرس تغيرات الدالة $g$ وضع جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن : $\exists!\alpha\in\left]e^{-1},+\infty\right[ \ : \ g(\alpha)=0$ .

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على حيز تعريفها .

## الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\left[e^{-1},+\infty\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=e^{\frac{\ln(1+\ln x)}{x}} \quad ; \quad x>e^{-1} \\ f\left(e^{-1}\right)=0 \end{cases}$$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ .

1. بين أن الدالة $f$ متصلة على اليمين في $e^{-1}$ .

2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ واستنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ .

3. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to e^{-1}\\ x>e^{-1}}} \frac{f(x)}{x-e^{-1}}=0$ . يمكنك استعمال المتساوية :

$$\ln\left(\frac{f(x)}{x-e^{-1}}\right)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(ex)}{ex-1}\right)+(e-1)\ln(ex-1)+\frac{1-ex}{x}\ln(ex-1)+1$$

أعط تأويلا هندسيا للنتيجة .

4. لتكن $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$ على المجال $\left]e^{-1},+\infty\right[$ .

أ- بين أن :

$$\forall x\in\left]e^{-1},+\infty\right[ \ : \ f'(x)=\frac{g(1+\ln x)}{x^2(1+\ln x)}f(x)$$

ب- حدد بدلالة $\alpha$ حل المعادلة $f'(x)=0$ في $\left]e^{-1},+\infty\right[$ .

$\alpha$ هو العدد المعرف في الجزء الأول .

جـ- ضع جدول تغيرات الدالة $f$ .

5. أدرس وضع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : $y=1$ .

6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ . نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=5cm$

$e^{\alpha-1}\approx 2,2$ و $e^{-1}\approx 0,4$ و $f(e^{\alpha-1})\approx 1,3$

ونقبل أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطتي انعطاف $I_1$ و $I_2$ بحيث أفصوليهما $x_1$ و $x_2$ يحققان على التوالي :

$e^{-1}<x_1<1$ و $x_2>e^{\alpha-1}$

(حساب $x_1$ و$x_2$ غير مطلوب).

## التمرين 5 :

**الجزء الأول :** لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=x\ln|x|-(x-1)\ln|x-1| \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*-\{1\} \\ g(0)=g(1)=0 \end{cases}$$

1. بين أن المستقيم $(\Delta)\ :\ x=\frac{1}{2}$ محور تماثل للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

2. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة $g$ في النقطة $x_0=1$.

3. أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)=-1$ .

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$ . ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$؟

4. أ- تحقق أن :

$$\forall x\in\left[\frac{1}{2},1\right[\cup\left]1,+\infty\right[ \ : \ g'(x)=\ln\left(\frac{x}{|x-1|}\right)$$

ب- أدرس إشارة $g'(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة $g$ على $\mathbb{R}$.

5. أ- حدد معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في $A(2,g(2))$.

ب- أنشئ $(T)$ و $(\mathscr{C}_g)$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$. $(\ln 2\approx 0,7)$

6. ماهي إشارة $g(x)$ ؟

**الجزء الثاني :** لتكن $f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1,1\}$ ب:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\ln|x-1|}{\ln|x|} \quad ; \quad x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\} \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال وقابلية اشتقاق الدالة $f$ في الصفر .

2. أحسب نهايات $f$ عند محدات حيز تعريفها.

3. أ- بين أن :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1,1\} \ : \ f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-1)(\ln|x|)^2}$$

ب- أدرس إشارة $f'(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة $f$.

4. حدد تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع $(Ox)$ وأحسب $f(-2)$، وأنشئ $(\mathscr{C}_f)$.