ثانوية الجولان التأهيلية	السنة الثانية بكالوريا علوم رياضية	السنة الدراسية : 2011 – 2010	سلسلة التمارين رقم :02 الأستاذ : أحمد مومنى

المتتاليات العددية

التمرين 01

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{x\operatorname{Arctan} x}{\pi}$$

و (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0\in]0,1] \\ U_{n+1}=\dfrac{U_n\operatorname{Arctan} U_n}{\pi} \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

1 – a – بين أن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$

b – تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $f(x)\le\frac{1}{2}x$

2 – a – بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0\langle U_{n+1}\le\frac{1}{2}U_n$

b – بين أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0\langle U_n\le 1$

c – استنتج أن (U_n) متقاربة

3 – استنتج أن: $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0\langle U_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n U_0$

و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4 – نعتبر المتتالية العددية (S_n) المعرفة كمايلي:

$$(\forall n\in\mathbb{N}) \quad S_n=U_0+U_1+\cdots+U_n$$

a – تحقق أن (S_n) تزايدية قطعا

b – بين أن:

$$(n\in\mathbb{N}) \quad U_0\le S_n\le 2U_0\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

c – استنتج أن (S_n) متقاربة

التمرين 02

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{2}\right)^3$

1 – أدرس رتابة f على $\mathbb{R}^+$ و تحقق أن $f([0,1[)\subset[0,1[$

2 – بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$:

$$f(x)-x=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(\frac{1}{4}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)+\sqrt[3]{x^2}\right)$$

3– لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\left(\dfrac{1+\sqrt[3]{U_n}}{2}\right)^3 ; \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

a – بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad 0\le U_n<1$

b – حدد رتابة المتتالية (U_n) واستنتج أنها متقاربة محددا نهايتها

4 – لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $V_n=-1+\sqrt[3]{U_n}$

a – بين أن المتتالية (V_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

b – استنتج ان: $(\forall n\in\mathbb{N}) \quad U_n=\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3$

c – أحسب بدلالة n : $W_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(k+V_k)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n$

d– لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع :

$$S_n=(U_1)^{\frac{1}{3}}+(U_2)^{\frac{1}{3}}+\cdots+(U_n)^{\frac{1}{3}}$$

بين: $S_n=n-1+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

التمرين : 03

لتكن $\left(U_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية:

$$\begin{cases} U_0=\alpha\in\left]1,+\infty\right[\\ U_{n+1}=\dfrac{\alpha U_n+1}{U_n} \quad ; \quad \left(\forall n\in N\right) \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين العدديتين $\left(V_n\right)$ و $\left(W_n\right)$ المعرفتين بما يلي:

$$V_n=U_{2n} \quad \text{و}$$

$$\left(\forall n\in N\right)\quad W_n=U_{2n+1}$$

1– بين أن: $\left(\forall n\in N\right):\ \alpha\le U_n\langle\alpha+1$

2 – a – بين أن:

$$\left(\forall n\in N\right)\quad V_{n+1}=\alpha+\frac{V_n}{\alpha V_n+1}$$

b – بين أن:

$$\left(\forall n\in N\right)\quad W_{n+1}=\alpha+\frac{W_n}{\alpha W_n+1}$$

c – استنتج أن: $\left(\forall n\in N\right)\quad V_n\ \langle\ W_n$

3 – a – بين أن المتتالية $\left(V_n\right)$ تزايدية قطعا

b – استنتج أن المتتالية $\left(W_n\right)$ تناقصية قطعا

4 – a – بين أن :

$$\left(\forall n\in N\right)\quad W_{n+1}-V_{n+1}\le\frac{1}{\left(\alpha^2+1\right)^2}\left(W_n-V_n\right)$$

b – استنتج أن:

$$\left(\forall n\in N\right)\quad 0\ \langle\ W_n-V_n\ \langle\ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\left(\alpha^2+1\right)^2}\right)^n$$

c – استنتج أن المتتاليتين $\left(V_n\right)$ و $\left(W_n\right)$ متحاديتين

5 – a – بين أن $\left(V_n\right)$ متقاربة و أن

$$\lim_{n\to+\infty}V_n=\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$$

b – نضع $\beta=\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4}}{2}$ بين أن :

$$\left(\forall n\in N\right)\quad \left|\,U_n-\beta\,\right|\le\left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^n\left|\beta-\alpha\right|$$

c – استنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين :04

.

f دالة عددية معرفة على IR بما يلي:

$$f\left(x\right)=2\left(\frac{\pi}{2}-Arc\tan\left|x\right|\right)$$

1 – لتكن $\left(U_n\right)_{n\ge1}$ المتتالية العددية المعرف بما يلي:

$$U_n=2\left(Arc\tan 1+2Arc\tan\frac{1}{2}+\cdots+nArc\tan\frac{1}{n}\right)$$

a – تحقق أن : $\left(\forall n\in IN^*\right)\quad U_n=\sum\limits_{k=1}^{n}kf\left(k\right)$

b – بين أن :

$$\left(\forall n\in IN^*\right)\quad n\left(n+1\right)Arc\tan\frac{1}{n}\le U_n\le\frac{\pi n\left(n+1\right)}{4}$$

c – استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

2 – بين أنه: $\left(\exists!\alpha\in\left]1,2\right[\right)/f\left(\alpha\right)=\alpha$

3– نعتبر المتتالية العددية $\left(V_n\right)$ المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

$$\begin{cases} V_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ V_{n+1}=\pi-2Arc\tan\left(V_n\right) \quad , \quad \left(\forall n\in IN\right) \end{cases}$$

ولتكن $\left(W_n\right)$ و $\left(S_n\right)$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين بما يلي:

$$\left(\forall n\in IN\right)\quad S_n=V_{2n+1} \quad \text{و} \quad W_n=V_{2n}$$

a – بين أن: $\left(\forall n\in IN\right)\quad 0\ \langle\ V_n\langle\ \pi$

b – بين أن: $W_{n+1}=\left(fof\right)\left(W_n\right)$ و

$$\left(\forall n\in IN\right)\quad S_{n+1}=\left(fof\right)\left(S_n\right)$$

c – بين أن: $\left(\forall n\in IN\right)\quad W_n\langle\ \alpha\ \langle S_n$

نضع : $\omega=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و لتكن $\left(U_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بالصيغة الترجعية التالية

التمرين 05:

$$\begin{cases} U_0=U_1=1 \\ U_{n+2}=U_{n+1}+U_n \quad (\forall n\in N) \end{cases}$$

1 – تحقق أن : $\omega^2=\omega+1$ و أن $\omega-1=\frac{1}{\omega}$

2 – بين أن : $U_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\omega^{n+1}-(1-\omega)^{n+1}\right)$ $(\forall n\in IN)$ و استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3 – نعتبر المتتالية العددية $\left(V_n\right)$ المعرفة بما يلي: $V_n=\frac{U_{n+1}}{U_n}$ $(\forall n\in IN)$

a – بين أن : $\omega^{n+1}\left(V_n-\omega\right)U_n=(-1)^{n+1}$ $(\forall n\in IN)$

b – بين أن $\left(V_n\right)$ متقاربة وحدد نهايتها

....

ليكن α عددا حقيقيا من المجال $]1,+\infty[$ و N عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $N-1\le\sqrt{\alpha}\le N$

و لتكن $\left(U_n\right)$ و $\left(V_n\right)$ المتتاليتين العدديتين المعرفتين كما يلي:

$$\begin{cases} U_0=N \\ U_{n+1}=\frac{U_n^2+\alpha}{2U_n} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} V_0=1 \\ V_{n+1}=\frac{V_n+\sqrt{\alpha}}{2} \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

التمرين : 06

1 – a – بين أن: $U_{n+1}-\sqrt{\alpha}=\frac{1}{2U_n}\left(U_n-\sqrt{\alpha}\right)^2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

b – بين أن $\left(U_n\right)$ تناقصية

c – استنتج أن: $\sqrt{\alpha}\le U_n\le N$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2 – a – بين أن: $0\le U_n-\sqrt{\alpha}\le\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1}2^k}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

b – استنتج أن: $0\le U_n-\sqrt{\alpha}\le\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^n-1}$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3 – نعتبر المتتالية العددية $\left(W_n\right)$ المعرفة بما يلي: $W_n=V_n-\sqrt{\alpha}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

a – بين أن : $\left(W_n\right)$ متتالية هندسية

b – استنتج $\lim V_n$