

مبرهنة رول و مبرهنة التزايدات المنتهية:

التمرين رقم 01 (Taylor – Lagrange)

لتكن f دالة قابلة للاشتاقاق $(n+1)$ مرّة على مجال I من \mathbb{R} حيث $n \in \mathbb{N}^*$. ولتكن $a < b$ عددين حقيقيين من المجال I بحيث

$$\Psi(x) = f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x) \frac{(b-x)^k}{k!} - \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} \right) \quad \text{نضع :}$$

- أحسب $\Psi'(x)$ لكل $x \in]a, b[$

2 - بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث :

$$f(b) - f(a) = f'(a) \frac{(b-a)}{1!} + f''(a) \frac{(b-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3 - لتكن f دالة قابلة للاشتاقاق 3 مرات على مجال I من \mathbb{R} . ولتكن $a < b$ عددين حقيقيين من المجال I بحيث : بين أنه يوجد عدد حقيقي c من المجال $]a, b[$ بحيث :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a) + \frac{1}{2}(b-a)f''(a) + \frac{1}{6}(b-a)^2 f'''(c)$$

(Règle de L'Hospital) :02

لتكن f و g دالتين عديتين متصلتين على مجال $]a, b[$ و قابلتين للاشتاقاق على المجال $[a, b]$

1 - بين أنه : $(\exists c \in]a, b[) : (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$

2 - نفترض أن $\forall x \in]a, b[: g'(x) \neq 0$

لتكن $f(x_0) = g(x_0) = 0$ بحيث $x_0 \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{بين أن : a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\arctan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{4}{\pi}x - 1\right)} \quad \text{استنتج - b}$$

التمرين رقم 03 :

1 - بين أن : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

$(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : |\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

2 - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي

$$f(x) = \sin(\cos x) - \cos(\sin x)$$

$(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]) : f(x) < -2 \sin\left(\frac{x + \sin x}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \sin x}{2}\right)$ - a

$(\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]) : \sin(\cos x) \leq 0 \quad \text{و} \quad \cos(\sin x) > 0$ بين أن :

استنتاج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) < 0$

الثانوية علوم رياضية - ثانوية الجolan التأهيلية - بيوكرى -