ثانوية الجولان التأهيلية
بيوكرى

السنة الثانية بكالوريا
علوم رياضية

السنة الدراسية :
2010 – 2011

سلسلة التمارين رقم :01

الأستاذ : أحمد مومنى

النهايات و الاتصال

التمرين رقم 01

لتكن f دالة عددية معرفة على R^+ وتحقق الشروط التالية:

I) – f متصلة على R^+

II) – $\left(\forall x \in R^+\right): \quad f(x) \rangle 0$

III) – $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \delta \langle 1$

1 – a – نفترض أن: $\left(\forall x \in R_+^*\right): \ f(x) \le x$

بين أن : $f(0) \le 0$

b – استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا α بحيث: $f(\alpha) \rangle \alpha$

2 – a – بين أن: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = -\infty$

b – استنتج أنه يوجد عدد حقيقي موجب قطعا β بحيث: $f(\beta) \langle \beta$

التمرين رقم :02

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{6\arctan x - \pi}{3x^2 - \sqrt{3}x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\sqrt[3]{\dfrac{1+2x}{x^4}}}$$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}} \sqrt[12]{x}$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[15]{x^3}}{3\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x}}$

و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2\,\mathrm{Arctan}\, x)}{\mathrm{Arctan}(\sin 2x)}$

و $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$

و $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{Arctan}\left[\dfrac{(\cos 2x - \cos x)\sin x}{\sqrt{3}(\tan x - \sin x)}\right]$

التمرين رقم : 03

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-\pi, \pi[$ بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{4x^3+1} - \sqrt[3]{3x^3+1}}{2x^2 \sin x} & , \quad x \in]0, \pi[\\ f(x) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{x\sqrt[5]{4-x}}{2 + \sin\dfrac{1}{x}} & , \quad x \in]-\pi, 0[\\ \mathrm{f}(0) = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

بين أن الدالة f متصلة على المجال $]-\pi, \pi[$

التمرين رقم : 04

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$f(x) = \left(\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3$ و لتكن (E) المعادلة التالية :

$f(x) + 125 = 0$

1 – حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2 – a – أدرس إشارة $f(x)$ على D_f (يمكن وضع $\sqrt[3]{x} = t$)

b – استنتج أنه إذا كان x حل للمعادلة (E) فإن $x \in]1, 27[$

3 – حدد مجموعة حلول المعادلة (E)

التمرين رقم :05

1 – بين أن لكل x و y من $]0, +\infty[$:

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} = x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2 – استنتج أن :

$$\sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}} = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3}$$

3 – استنتج أنه لكل a و b من $]0, +\infty[$:

$$a + b + \sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right) + 2\sqrt{\left(a + \sqrt[3]{a^2 b}\right)\left(b + \sqrt[3]{ab^2}\right)} = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)^3$$

التمرين رقم :06

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x\sqrt{3-x}}{2+\sin\frac{1}{x}}\cos\left(1-\sin\dfrac{1}{x}\right) & ;\quad x\langle 0 \\ f(x)=\dfrac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-2}\left(1-\cos\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right) & ;\quad x\rangle 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

1 – بين أن : $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le 2|x|$ $\quad(\forall x\in]-1,0[)$

2 – أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (يمكن وضع $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$)

3 – أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0

التمرين رقم :07

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي:

$$f(x)=A\operatorname{rctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

1 – بين أن: $0\langle f(x)\langle\frac{\pi}{2}$ $\quad(\forall x\in R)$

2 – a - أتبت أن:

$$1-\tan^2(f(x))=2x\tan(f(x)) \quad (\forall x\in R)$$

b - استنتج أن لكل x من R : $\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)=x$

3 – استنتج أن: $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}A\operatorname{rctan}x$ $\quad(\forall x\in R)$

4 – a – بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا ω في المجال [0,1]

b – بين أن: $A\operatorname{rctan}x+A\operatorname{rctan}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ لكل x من R_+^*

c – استنتج أن: $A\operatorname{rctan}\frac{1}{\omega}=2\omega$

التمرين رقم :08

1 – لتكن f دالة عددية متصلة على قطعة [a,b] حيث:

$1+f(a)\rangle a^3$ و $1+f(b)\langle ab^2$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي β من المجال [a,b] بحيث:

$$f(\beta)=a\beta^2-1$$

2 لتكن f دالة عددية متصلة على المجال I=[2004,3000] بحيث:

$f(2004)\langle 6,012.10^6$ و $f(3000)\rangle 9.10^6$

بين أن : $(\exists\alpha\in I): f(x)=3000x$

التمرين رقم :09

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[6]{x}} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{-x^3+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{x}$$

و $\lim\limits_{x\to 2}\tan\left(\frac{96\pi}{11}\left(\frac{\sqrt[4]{x+14}-\sqrt[3]{10-x}}{x-2}\right)\right)$

و $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{1-x}}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(\frac{\pi}{3}\sqrt[12]{x}\left(\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}\right)\right)$

التمرين رقم :10

لتكن f الدالة العددية المعرفة على R^+ كما يلي:

$$f(x)=A\operatorname{rctan}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)+A\operatorname{rctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{\pi}{4}$$

1 – بين أن: $0\le A\operatorname{rctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)\langle\frac{\pi}{4}$ $\quad(\forall x\in R^+)$

2 – a – إستنتج انه إذا كانx حل للمعادلة $f(x)=0$ فإن:

$$0\langle A\operatorname{rctan}\left(\frac{x-1}{2x+1}\right)\le\frac{\pi}{4}$$

b – إستنتج ان: $(f(x)=0)\Rightarrow x\rangle 1$

3 – بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حل في المجال $]1,+\infty[$

4 – حل في R^+ المعادلة: $f(x)=0$

التمرين رقم :11

1 – لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}$$

a – حل في المجال $[-1,+\infty[$ المعادلة :

$$\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}=0$$

b– استنتج أن: $D_f=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

c– بين أن:

$$(\forall x\in D_f):\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt[12]{1+x}\left(1+\sqrt[12]{1+x}\right)}$$

d – أحسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

التمرين رقم :12

لتكن f و g دالتين معرفتين و متصلتين على مجال [a,b] بحيث:

$f(x) \le g(x)$ لكل x من [a,b].

α و β عددين حقيقيين من المجال [a,b] يحققان ما يلي :

$f(\alpha)=\alpha$ و $g(\beta)=\beta$

بين أن المعادلة التالية تقبل على الأقل حلا واحدا في المجال [a,b]:

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)=x$$

حيث λ عدد حقيقي من المجال [0,1]

.....

التمرين رقم :13

لتكن f الدالة العددية المعرفة

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{-7}{2}+\dfrac{1-\sqrt[3]{-(2+x)}}{2} & ;\ x<-2 \\ f(x)=x^3-3x-1 & ;\ x\ge -2 \end{cases}$$

1 – a – حدد D_f حيز تعريف الدالة f

b – أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

c – أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

2 – a – بين أن f تقابل من المجال $I=]-\infty,-2[$ نحو مجال J يجب تحديده

b – حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

3 – a – حل في المجال $[-\pi,\pi]$ المعدلة : $\cos 3y=\dfrac{1}{2}$

b – تحقق أن :

$$(\forall y\in\mathbb{R})\qquad \cos(3y)+3\cos y=4\cos^3 y$$

4 – ليكن g قصور الدالة f على المجال $[-2,+\infty[$

a – أدرس رتابة الدالة g على المجال $[-2,+\infty[$

b – بين المعادلة $g(x)=0$ تقبل بالضبط 3 حلول α و β و λ من المجال $[-2,2]$

5 – a – بوضع $x=2\cos y$ بين أن: المعادلة $g(x)=0$ تكافئ $\cos 3y=\dfrac{1}{2}$

b – استنتج أن: قيم α و β و λ هي بالضبط $2\cos\dfrac{\pi}{9}$ و $2\cos\dfrac{5\pi}{9}$ و $2\cos\dfrac{7\pi}{9}$

التمرين رقم : 14

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x)=x^2+x-2x\sqrt{x}+2 \qquad (x\in\mathbb{R}^+)$$

1- بين أن f تقابل من المجال $[1,+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

2- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α > 1 بحيث:

$$\alpha^2+\alpha=2\alpha\sqrt{\alpha}+3$$

3 – بين أن: $f^{-1}(x)=\dfrac{\left(1+\sqrt{1+4\sqrt{x-2}}\right)^2}{4} \qquad (\forall x\ge 2)$

4 – استنتج قيمة العدد α

.....

التمرين رقم : 15

ليكن a و b عددين حقيقيين موجبين قطعا و f دالة عددية معرفة ومتصلة على المجال $[0,1]$

و لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$h(x)=f(x)-\frac{af(0)+bf(1)}{a+b}$$

1 – أ – بين أن الدالة h متصلة على المجال $[0,1]$

ب – تحقق أن : $h(0)=\dfrac{b[f(0)-f(1)]}{a+b}$ و

$$h(1)=\frac{a[f(1)-f(0)]}{a+b}$$

2 – نفترض أن : $f(0)\ne f(1)$

بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\beta\in]0,1[$ بحيث :

$$f(\beta)=\frac{af(0)+bf(1)}{a+b}$$

التمرين رقم: 16

تأطير حل المعادلة $f(x)=0$ بطريقة التفرع الثنائي (La méthode de la dichotomie)

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2-3x+1$

1 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين في $\mathbb{R}$

2 – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]0,1[$

3 – a – أحسب ما يلي : $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ و $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ و $f\left(\dfrac{3}{8}\right)$ و $f\left(\dfrac{7}{16}\right)$

b – باستعمال طريقة التفرع الثنائي بين أن :

$$0{,}375 < \alpha < 0{,}4375$$

(تأطير للعدد α سعته 625×10^{-3})

AHMED MOUMNI