الثانية بكالوريا علوم رياضيـــة	الفرض المنزلـــــي رقم 5	الأستاذ : الحيـــــان

التمرين الأول :

I. لتكن u الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ u(t)=(2-t)e^t-2$$

1. أدرس تغيرات الدالة u.
2. أ- بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $\ln 4<\alpha<\ln 6$.

ب- استنتج إشارة $u(t)$ لكل $t \in \mathbb{R}$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(t)=\dfrac{1-e^t}{t^2}$.

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. أ- تحقق من أن : $\forall t \in \mathscr{D}_f \ : \ f'(t)=\dfrac{t\ u(t)}{t^4}$.

وأن : $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha^2-2\alpha}$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f.

2. حدد الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
3. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$. (نعطي : $f(\alpha)\approx -2$)

III. لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt \ ; \ x>0 \\ F(0)=-\ln 2 \end{cases}$$

1. أ- بين أن لكل $x \in]0,+\infty[$:

$$e^x\int_x^{2x}\frac{dt}{t}<\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt<e^{2x}\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$$

ب- استنتج : $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$.

جـ- باستعمال المكاملة بالأجزاء، بين أن لكل $x \in]0,+\infty[$

لدينا : $F(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2x}-\dfrac{e^x-1}{x}-\displaystyle\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}\,dt$

د- استنتج أن F دالة متصلة على اليمين في 0.

2. أ- ليكن $x>\alpha$. بين أن :

$$\frac{1-e^{2x}}{4x}\le F(x)\le\frac{1-e^x}{x}$$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ ، ثم استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_F)$.

3. بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ، ثم أحسب $F'(x)$ لكل $x \in]0,+\infty[$.

4. ضع جدول تغيرات الدالة F.

التمرين الثاني :

لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $J_n=\displaystyle\int_0^1(1-x)^n e^{\frac{x}{2}}dx$

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\ 2^k} \quad \text{و} \quad I_n=\frac{1}{n!\ 2^{n+1}}\ J_n$$

1. بين أن $(u_n)_{n\ge 1}$ متتالية تزايدية.
2. أ- تحقق من أن : $\forall k \in \mathbb{N}^* \ : \ \dfrac{1}{k!2^k}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

ب- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ u_n\le 2$.

جـ- استنتج أن $(u_n)_{n\ge 1}$ متتالية متقاربة.

3. أ- أحسب J_1 ثم I_1 .

ب- بين أن :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ J_{n+1}=2(n+1)J_n-2$$

جـ- استنتج أن : $I_n-I_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!2^{n+1}}$.

د- استنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* \ : \ u_n=\sqrt{e}-I_n$.

4. أ- بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0\le I_n\le\dfrac{\sqrt{e}}{(n+1)!2^{n+1}}$.

ب- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n$ ، ثم $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثالـــــث :

1. حل المعادلة التفاضلية : $(E): \ 9y''+\pi^2 y=0$.
2. ليكن f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق الشرطان التاليان :

✓ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يمر من النقطة $A(1,-\sqrt{2})$.

✓ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا أفقيا في النقطة A .

أ- حدد $f(1)$ و $f'(1)$.

ب- حدد الدالة f .

جـ- تحقق من أن :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}(x+2)\right)$$

3. بين أن الدالة f دورية وأن دورها $T=6$.
4. أحسب الوسط التربيعي I للدالة f على المجال $[0,6]$.

(I هو العدد الحقيقي الموجب المعرف بما يلي :

$$I^2=\frac{1}{6}\int_0^6[f(x)]^2dx$$