الثقفية بكالوريا علوم رياضية	فرض منزلـــــــي رقم 1	ذ . الحيـــان

مسألـــــــــــــــــــــــة :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f\left(x\right)=x^3-3x-3$.

نعتبر العددين : $a=\dfrac{\sqrt[3]{12+4\sqrt{5}}}{2}$ و $\alpha=a+\dfrac{1}{a}$.

I. 1. قارن العددين a و 1 ثم قارن العددين α و 1 ، معللا جوابك (دون استعمال الآلة الحاسبة).

2. أ- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين $\left[1,+\infty\right[$ و $\left]-\infty,-1\right]$ و أن f تناقصية قطعا على المجال $\left[-1,1\right]$.

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f ، ثم حدد صورة كل من المجالات $\left[1,+\infty\right[$ و $\left]-\infty,-1\right]$ و $\left[-1,1\right]$ بالدالة f.

جـ- استنتج أن المعادلة $f\left(x\right)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

3. أ- بين أن $f\left(\alpha\right)=0$ ، ثم استنتج حلول المعادلة $f\left(x\right)=0$ في $\mathbb{R}$.

(استعمل المتطابقة الهامة : $\left(a+b\right)^3=a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)$)

ب- استنتج أن : $\alpha \in \left]2,3\right[$.

4. حل في المجال $\left]\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$ المعادلة : $Arc\tan\left(\sqrt{\tan^3\left(x\right)-3\tan\left(x\right)}\right)=\dfrac{\pi}{3}$. أعط الحلول بدلالة α.

(بإمكانك استعمال المعادلة $\left(E\right)$)

II. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي : $g\left(x\right)=\dfrac{3}{\sqrt{x}}+3$.

1. بين أن $g\left(\left]0,+\infty\right[\right)=\left]3,+\infty\right[$. (علل جوابك)

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $g\left(x\right)=x$ . . أعط الحلول بدلالة α.

3. بين أن : $\forall\left(x,y\right)\in\left(\left[3,+\infty\right[\right)^2 \ : \ \left|g\left(x\right)-g\left(y\right)\right|\le\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left|x-y\right|$.

III. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_1=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{3}{\sqrt{u_n}}+3 \ ; \ n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ 3\le u_n\le 9$. (بإمكانك استعمال رتابة الدالة g)

2. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ \left|u_{n+1}-\alpha^2\right|\le\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left|u_n-\alpha^2\right|$.

3. استنتج أن : $\forall n\in\mathbb{N}^* \ : \ \left|u_n-\alpha^2\right|\le\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^{n-1}\left(\alpha^2-3\right)$.

4. استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.