الثانية بكالوريا علوم رياضية	فرض منزلي رقم 2	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\pi x}{2Arc\tan x} & , \quad x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أ. تحقق من أن f دالة زوجية .

ب. أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. بين أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Arc\tan x}{x}=1$ ؛ ثم استنتج أن الدالة f متصلة في $x_0=0$.

3. أ. بين أن : $\forall x>0\ ,\ \forall c\in\left]0,x\right[\ :\ \dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{1}{1+c^2}<1$

ب. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto Arc\tan t$ في مجال $[0,x]$ بحيث $x>0$ ؛ أثبت أن :

$$\frac{1}{1+x^2}<Arc\tan x<x$$

ج. بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=0$ ؛ ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها .

4. أ. أحسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$.

ب. أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}^{+*}$ (يمكن استعمال 3- ب)

ج. أعط جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

5. أ. بين أن : $\forall x>0:\ \ Arc\tan x+Arc\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$.

6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.   الوحدة = 2cm .

التمرين 2 :

I – لتكن g الدالة المعرفة على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{\tan x-x}{x} & , \quad x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$$

1. بين أن : $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\ :\ \left(1+\tan^2 x\right)x-\tan x>0$

2. أ. بين أن :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ :\ g'(x)=\frac{\left(1+\tan^2 x\right)x-\tan x}{x^2}$$

ب. بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 ثم أعط رتابة g على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

II- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=Arc\tan\left(g(x)\right) & , \quad x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ f(0)=0 & , \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1. أدرس اتصال f على اليمين في 0 وعلى اليسار في $\dfrac{\pi}{2}$.

2. أ. بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $t\mapsto\tan t-t$ على المجال $[0,x]$ بحيث $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ ؛ أثبت أن :

$$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\ :\ \ 0\leq\tan x-x\leq x\ \tan^2(x)$$

ب. أحسب : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2}$.

ج. أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 0 ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا.

3. أ. بين أن : $\forall t>0: Arc\tan(t)+Arc\tan\left(\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

ثم استنتج أن :

$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ :\ f(x)-\frac{\pi}{2}=-Arc\tan\left(\frac{x}{\tan x-x}\right)$$

ب. بين أن : $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}\dfrac{f(x)-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

4. أدرس تغيرات g وأعط جدول تغيراتها .

5. أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.   الوحدة = 2cm .

التمرين 3 :

1. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال $[a,b]$ بحيث : $f(a)=f(b)$ و $a<b$.

بين أن : $\forall x\in\left]a,b\right[\ \ ;\ \ \exists c\in\left]a,b\right[\ \ /$

$$f(x)=(x-a)(x-b)\frac{f''(c)}{2}$$

2. ماذا يمكن أن تستنتج بالنسبة لمنحنى الدالة f إذا كان لدينا :

$$\forall x\in[a,b]\ \ :\ \ f''(x)>0$$

3. لتكن f دالة قابلة للاشتقاق ثلاث مرات على مجال $[a,b]$ حيث $a<b$ ؛ ولتكن x_1 و x_2 و x_3 ثلاثة أعداد حقيقية بحيث :

$$a\leq x_1<x_2<x_3\leq b$$

و $\forall i\in\{1,2,3\} : f(x_i)=0$

بين أن : $\forall x\in\left]a,b\right[\;;\; \exists c\in\left]a,b\right[\;/$

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\frac{f'''(c)}{3!}$$

التمرين 4 : Règle de L'Hospital

1. لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على مجال $[a,b]$ وقابلتين للاشتقاق على المجال $\left]a,b\right[$. بين أن :

$$\exists c\in\left]a,b\right[\;:\; [f(b)-f(a)]g'(c)=[g(b)-g(a)]f'(c)$$

بإمكانك استعمال الدالة العددية :

$$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto[f(b)-f(a)]\times[g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)]\times[f(x)-f(a)]$$

ملاحظة : إذا كان $g'(c)\neq 0$ و $g(a)\neq g(b)$ ، فإن :

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. أ. بين أنه إذا كان $f(a)=g(a)=0$ وأن $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

ب. أحسب : $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{Arc\tan(x)-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$.

ج. انتبه : الإستلزام المعاكس للإستلزام (2 – أ) خاطئ . أعط مثالا مضادا .

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & , \quad x\geq 2\\ f(x)=\frac{2}{\pi}Arc\tan\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & , \quad x<2\end{cases}$$

A. 1. حدد $\mathcal{D}_f$ ، حيز تعريف الدالة f .

2. أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=2$.

3. أحسب نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$ ؛ ثم أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

4. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين وعلى اليسار في النقطة $x_0=2$.

5. أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $\left]-\infty,2\right[$ ولكل x من المجال $\left]2,+\infty\right[$ ؛ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

6. أرسم $(\mathscr{C}_f)$. (نعطي : $f(0)\simeq 0,4$)

7. ليكن g قصور الدالة f على المجال $\left]-\infty,2\right[$.
بين أن g تقابل من المجال $\left]-\infty,2\right[$ نحو مجال يجب تحديده. حدد g^{-1} ثم مثل منحناها في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B. 1. أ. بين أنه يوجد عدد حقيقي k من المجال $\left]0,1\right[$ بحيث : $0<g'(x)<k$ ؛ ثم استنتج رتابة الدالة h على المجال $\left]0,1\right[$ حيث : $h(x)=g(x)-x$.

ب. بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left]0,1\right[$ بحيث : $g(\alpha)=\alpha$.

2. نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{4}\\ u_{n+1}=g(u_n) \quad , \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

أ. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; 0<u_n<1$.

ب. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; |u_{n+1}-\alpha|<k|u_n-\alpha|$.

ج. استنتج أن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة وأن نهايتها هي α .

التمرين 6 :

I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f(x)=Arc\tan(x)+2x-1$$

1. أثبت أن : $\forall x\in\mathbb{R} : f'(x)>2$.

2. بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.

3. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α وأن $\alpha\in\left]0,1\right[$.

4. بين أن : $\forall x>\alpha \;:\; f(x)>x$.

II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=b & , \quad (b>\alpha)\\ u_{n+1}=f^{-1}(u_n) & , \quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} \;:\; u_n>\alpha$.

2. أدرس رتابة $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ واستنتج أنها متقاربة .

III-

1. باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن :

$$\forall n\in\mathbb{N} :\; u_{n+1}-\alpha<\frac{1}{2}(u_n-\alpha)$$

2. استنتج : $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.