

2 بكالوريا علوم رياضية ذ : عبدالله بن لختير	فرض محسوس رقم 04 الدورة الثانية : 2010/2009	ثانوية موسى بن نصیر نيابة الحميات
--	--	--------------------------------------

Durée:04 heure

• التمرين رقم 01:

1) حل المعادلة التفاضلية : $y' = 2y + 8$

2) بحث عن جميع الدوال العددية f القابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$ بحيث :

$$(F): (\forall x \in [0; +\infty[); x.f'(x) = (2x+1)f(x) + 8x^2$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \quad \text{لكل } x \in [0; +\infty[, \text{ نضع :}$$

أ- بين أن f تكون حلاً للمعادلة (F) إذا و فقط إذا كانت g حلاً للمعادلة (E) .

ب- يستنتج مجموعة حلول المعادلة (F) ، ثم حدد الحل h للمعادلة (F) بحيث : $h(1) = 0$

• التمرين رقم 02:

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$ لمجموعة الدوال العددية المعرفة من نحو \mathbb{R}

نعتبر F مجموعة حلول المعادلة التفاضلية : $y'' - 2y' + (1+a^2)y = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$

1) بين أن : $F = \{\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 / (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$ ، حيث φ_1 و φ_2 دالتين ينبعي تحديدهما.

2) بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(E, +, \cdot)$ وأن $B(\varphi_1, \varphi_2)$ أساس له.

3) تكن f دالة عددية تنتهي إلى F .

أ- بين أن $F \subseteq f'$ ، ثم حدد إحداثيتي f في الأساس $B(\varphi_1, \varphi_2)$.

ب- بين أن f تقبل دالة أصلية h تنتهي إلى F ، ثم حدد إحداثيتي h في الأساس $B(\varphi_1, \varphi_2)$.

ج- بين أن φ_1 و φ_2 دالتين أصليتين φ_1 و φ_2 (على التوالي) تنتهي إلى F ينبعي تحديدهما.

4) $v_n = \int_0^\pi e^x \sin(nx) dx$ و $u_n = \int_0^\pi e^x \cos(nx) dx$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، نضع :

عبر عن الحدين v_n و u_n بدالة n ، ثم أحسب نهايتي كل من $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

• التمرين رقم 03:

ليكن θ عددًا حقيقياً من المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

. (E _{θ}): $z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$ المعادلة : 1

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعمد منظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) ، نعتبر النقطتين

. $z_B = -2(1-i)e^{i\theta}$ و $z_A = 2e^{i\theta}$.

أ- أكتب z على الشكل الأسني .

ب- أحسب اللحق z_C للنقطة C بحيث يكون الرباعي $OACB$ متوازي الأضلاع .

. (F _{θ}): $(\sqrt{2}z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$ المعادلة : 3

أ- حدد الجذور المكعبة للعدد العقدي : $(-2 + 2i)e^{i\theta}$.

ب- إستنتج حلول المعادلة (F _{θ}) على الشكل الجبري .

• التمرين رقم 04:

. $\overline{xxxx}_{(b)} = (\overline{yy}_{(b)})^2$ و x و y رقمين متتابعين و غير منعدمين في نظمة عد ذات الأساس b بحيث :

. (E): $x(b^2 + 1) = y^2(b + 1)$ 1

. $(b^2 + 1) \wedge (b + 1) = (b + 1) \wedge 2$ 2

ب- باستعمال مبرهنة كوص ، أثبت أن b عدد فردي .

. $k \in \mathbb{N}^*$ ، حيث $b = 2k + 1$ 3

. (F): $x(2k^2 + 2k + 1) = y^2(k + 1)$

أ- بين أن : حدد قيمة k ، ثم إستنتاج كلًا من الأساس b و الرقمين x و y .

• التمرين رقم 05:

«الجزء الأول»:

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $I = [-1; +\infty)$ بما يلي :

. $g(x) = \frac{e^x}{(1+x)^2}$ و $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$

وليكن (C_f) و (C_g) منحني f و g في معلم متعمد و منظم

1)- أدرس تغيرات كل من f و g ، ثم تحقق أن : $(\forall x \in I); g(x) = f(x) - f'(x)$

- . 2- أدرس الوضع النسبي للمنحنين (C_g) و (C_f) ، ثم أرسمهما في نفس المعلم . 3- أحسب مساحة الحيز المستوي المخصوص بين المنحنين (C_g) و (C_f) و المستقيمين $x=0$ و $x=1$.

الجزء الثاني:

نضع : $J = \int_0^1 f(t) dt$ ، و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\cdot (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = (-1)^n \int_0^1 t^n e^t dt \text{ و } u_0 = \int_0^1 e^t dt$$

. 1- بين أن : $1 \leq J \leq \frac{e}{2}$ ، ثم أحسب الحدين u_0 و u_1 .

. 2- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = (-1)^{n+1} e + (n+1)u_n$:

. 3- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $R_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt$ و $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$:

. أ- بين أن : $[0;1] \frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$ لكل t من

. ثم إستنتج أن : $J = S_n + R_n$:

. ب- بين أن : $|R_n| \leq \frac{e}{2(n+2)}$ ، ثم إستنتاج أن المتتالية $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة محددا نهايتها .

الجزء الثالث:

. تكن $F(x) = \int_0^{\ln x} [f(t)]^2 dt$:
الدالة المعرفة بما يلي :

. 1- بين أن F معرفة على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty \right]$

. 2- بين أن F' قابلة للإشتقاق على $\left[\frac{1}{e}; +\infty \right]$ ، ثم أحسب $F'(x)$:

. 3- بين أن : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x) = \left(\forall x \in \left[\frac{1}{e}; 1 \right] \right); F(x) \leq x^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \ln x} \right)$ ، ثم أحسب $F(x)$ ،

. 4- بين أن : $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{e}; +\infty \right] \right); F(x) = \frac{x^2}{2(1 + \ln x)^2} - \frac{1}{2} + \int_0^{\ln x} \frac{e^{2t}}{(1+t)^3} dt$ ،

. 5- إستنتاج النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ ، ثم ضع جدول تغيرات الدالة F .

انتهى الموضوع .