مسألة

I. ليكن λ وسيطا حقيقيا . نعتبر الدالة العددية f_λ المعرفة على $\mathbb{R}^{+*}$ بما يلي : $f_\lambda(x)=\dfrac{\ln(x)+\lambda}{x^2+1}$.

وليكن $\mathscr{C}_\lambda$ المنحنى الممثل للدالة f_λ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ- لتكن $M\left(\alpha,\beta\right)$ نقطة من المستوى بحيث $\alpha>0$. بين أنه يوجد منحنى وحيد $\mathscr{C}_\lambda$ بحيث $M\left(\alpha,\beta\right)\in\mathscr{C}_\lambda$.

ب- بين أن f_λ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ وأن إشارة $f'_\lambda(x)$ هي إشارة $g_\lambda(x)$ ، حيث :

$$g_\lambda(x)=x^2+1-2x^2\left(\ln(x)+\lambda\right)$$

جـ- أدرس تغيرات الدالة g_λ ، محددا النهايتين : $\lim\limits_{x\to0^+}g_\lambda(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g_\lambda(x)$

د- بين أن المعادلة $g_\lambda(x)=0$ تقبل حلا وحيدا m_λ في المجال $]0,+\infty[$ ؛ ثم استنتج إشارة g_λ .

هـ- بين أن : $f_\lambda\left(m_\lambda\right)=\dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.

و- أحسب نهايتي f_λ عند محدي $]0,+\infty[$ ، ثم ضع جدول تغيراتها .

2. أ- بين أن : $m_0\in]1,2[$ و $m_{-1}\in]4,5[$ وحدد قيمة m_1 .

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنيين $\mathscr{C}_\lambda$ و $\mathscr{C}_{\lambda'}$ حيث : $\left(\lambda,\lambda'\right)\in\mathbb{R}^2$.

3. أنشئ في نفس المعلم المنحنيات $\mathscr{C}_{-1}$ و $\mathscr{C}_0$ و $\mathscr{C}_1$.

II . نعتبر الدالتين العدديتين φ و F المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{Arc\tan(x)}{x} & ; \quad x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases}$$ و

$$\begin{cases}F(x)=\displaystyle\int_1^x f_0(t)\,dt=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}\,dt & ; \quad x>0\\ F(0)=\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,dt\end{cases}$$

1. أ- بين أن F معرفة على $\mathbb{R}^+$.

ب- بين أن F متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^{+*}$ وأحسب $F'(x)$ لكل $x>0$.

2. بين أن : $F\left(\dfrac{1}{x}\right)=F(x)$: $\forall x>0$.

3. أ- بين أن : $F(x)=Arc\tan(x)\ln(x)-\displaystyle\int_1^x\varphi(t)\,dt$: $\forall x>0$.

ب- استنتج أن F متصلة في الصفر.

جـ- بين أن : $\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\le\varphi(x)\ln(x)$: $\forall x>0$ ، و استنتج أن F غير قابلة للاشتقاق في الصفر، ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

4. نضع : $I_k(x)=\displaystyle\int_1^x t^k\ln(t)\,dt$: $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall x>0$.

أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\forall x>0\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\ :\ I_k(x)=\frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x)-\frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} I_k(x)$ ، ثم بين أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

جـ- بين أن : $\forall x>0\,,\ \forall k\in\mathbb{N}\ :\ \frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}$

د- استنتج أن : $\forall x>0\ :\ F(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)+(-1)^{n+1}\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}dt$

هـ- استنتج أن : $\left|F(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right|\le I_{2n+2}(x)$: $\forall x\in\left]0,1\right[$.

5. نضع : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.

باستعمال السؤال (4.أ-) ، بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \left|F(0)-u_n\right|\le\frac{1}{(2n+3)^2}$.

ثم حدد قيمة مقربة للعدد $F(0)$ بالدقة 10^{-2} .

بالتوفيق إنشاء الله