

ثانوية موسى بن نصير

فرض محروس رقم 05

الثانية بكالوريا علوم رياضية

نيابة الحميسات

الدورة الأولى: 2009/2008

ن : عبد الله بن حخير

Durée : 03h• التمرين الأول:تكن n من \mathbb{N} ، نضع : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$ و $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$ (1)- أثبت أنه لكل n من \mathbb{N} ، لدينا :

$$(i): I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n \quad \text{و} \quad (ii): (n+1) \times I_{n+1} \times I_n = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad (iii): \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$$

(2)- بين أن المتتالية $(\sqrt{n} \times I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .(3)- باستعمال المتفاوتة : $\ln(1+x) \leq x$; $(\forall x \in]-1; +\infty[)$ ، أثبت أنه :

$$(\forall u \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u \geq -n \Rightarrow \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$$

(4)- استنتج أنه : $(\forall t \in [0; \sqrt{n}]) ; \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ (5)- بين أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sqrt{n} \times I_{2n+1} \leq J_n \leq \sqrt{n} \times I_{2n-2}$ ، ثم استنتج أن المتتالية $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$

متقاربة محمدا نهايتها .

• التمرين الثاني:- الجزء الأول:نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ و ليكن (C_f) منحنى f في معلم متعامد و ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، حيث الوحدة هي $1cm$.(1)- تحقق من أن $D_f = \mathbb{R}$ ، ثم بين أن الدالة f فردية .(2)- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$. abouzakariya@yahoo.fr(3)- بين أن f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4- ضع جدول تغيرات f ، ثم أدرس تقعر المنحنى (C_f) .

5- بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} ، ثم أرسم المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنيين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ على المجال $[0;1]$.

7- أحسب حجم المجسم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول المحور (Ox) دورة كاملة على

المجال $[0;1]$.

- الجزء الثاني :

لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المتتاليتين المعرفتين كما يلي :

$$v_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right) \text{ و } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

1- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة نهايتها $\ln(2)$.

2- بين أن :

$$(\forall t \in \mathbb{R}^{+*}); t - \frac{1}{6}t^3 \leq f(t) \leq t \text{ ، ثم استنتج أن : } (\forall t \in \mathbb{R}^{+*}); 1 - \frac{1}{2}t^2 \leq f'(t) \leq 1$$

3- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \leq v_n \leq u_n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- الجزء الثالث :

لتكن F الدالة المعرفة كما يلي :

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t^2} dt ; x \neq 0 \text{ و } F(0) = \ln(2)$$

1- تحقق من أن : $D_F = \mathbb{R}$ ، ثم بين أن الدالة F زوجية .

2- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); -\frac{1}{4}x^2 + \ln 2 \leq F(x) \leq \ln 2$.

3- أدرس إتصال و قابلية اشتقاق F في الصفر .

4- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}); \frac{f(x)}{2x} \leq F(x) \leq \frac{f(2x)}{2x}$.

5- استنتج طبيعة الفرع اللانهائي للمنحنى (C_F) بجوار $+\infty$.

6- بين أن F قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} و أن : $F'(x) = \frac{f(2x) - 2f(x)}{2x^2}$; $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$.

7- بين أن : $f(2x) - 2f(x) < 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*})$ (يمكنك إستعمال رقابة المشتقة f') .

8- أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم .

www.besmaths.un.ma