

مزيد من دروس التمارين الامتحانات . . . موقع قلمي

التمرين رقم 04: (5,5pts)

الجزء الأول: (1,5pts)

. 1- بين أن المعادلة: $x^3 + 2x - 1 = 0$ (E) تقبل حلا وحيدا x_0 في \mathbb{R} بحيث: $0 < x_0 < 1$.
 . 2- بين أن: $(\forall x \in [-1; +\infty[); \ln(1+x) \leq x$.

. 3- تكن f الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$.
 ✓ بين أن الدالة f متصلة على \mathbb{R} .
 الجزء الثاني: (04pts)

. تكن F الدالة المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

✓ بين أن F دالة زوجية.

. 1- بين أن F دالة زوجية.

. 2- ضع جدولًا تحدد فيه إشارة F على \mathbb{R}^+ .

. 3- بين أن F قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} وأن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); F'(x) = \frac{2 \ln(1+x^4) - \ln(1+x^2)}{x} \quad \text{و } F'(0) = 0$$

. 4- بين أن: $0 < \alpha < 1$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}^* بحيث:

✓ حدد منحي تغيرات F على كل مجال من المجالين $[0; \alpha]$ و $[\alpha; +\infty[$

. 5- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) : (\forall x \in \mathbb{R}^*); F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 3(\ln x)^2$, ثم استنتج النهاية

. يكمل: $x \in \mathbb{R}^*$

. 6- أحسب التكامل: $F(x) - 3(\ln x)^2 = \int_x^{\infty} \frac{\ln(1+t^{-2})}{t} dt$, ثم استنتج أن:

✓ بين أن: $(\forall x \in [1; +\infty[); 3(\ln x)^2 \leq F(x) \leq 3(\ln x)^2 + \frac{1}{2x^2}$

✓ أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$, ماذًا تستنتج بالنسبة للمنحي (C_F) بجوار $+\infty$ ؟

. 7- أرسم المنحي (C_F) في معلم متعمد ومنظّم

. نعطي: $F(2) \approx 1,5$ و $\alpha \approx 0,1$ و $\alpha \approx 0,7$

منارة الفردوس	فرض محسوس رقم 02	2 بالغ علوم رياضية
نيابة الأختيارات	الدورة الثانية : 2011/2010	ذ: عبد الله بن لخ提ير
	مدة الإنجاز: 04 ساعات	

التمرين رقم 01: (1,5pts)

. تكن f دالة متصلة على \mathbb{R} بحيث: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + \int_0^x f(t) dt$.
 . 1- بين أن f قابلة للإشتقاق على \mathbb{R} وأنها حل للمعادلة التفاضلية: $(E): y' = y + 1$.
 . 2- حل المعادلة (E) , ثم استنتج تعبير الدالة f على \mathbb{R} .

التمرين رقم 02: (2,5pts)

. تعتبر المعادلة التفاضلية: $(F): y'' + \frac{1}{x^4} y = 0$

. 1- تكن f و φ دالتين قابلتين للإشتقاق على \mathbb{R}^* بحيث: $f(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

. 2- بين أن f تكون حلًا للمعادلة (F) إذا وفقط إذا كانت φ حلًا للمعادلة $(G): y'' + y = 0$.
 . 3- حل المعادلة (G) , ثم استنتاج مجموعة حلول المعا

. 4- أحسب التكامل الثاني: $I = \int_1^\pi \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$

التمرين رقم 03: (03pts)

. تكن $v_n, n \in \mathbb{N}^*$, نضع: $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1}$ و $u_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x) dx$

. 1- بين أن: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}; 0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

. 2- أحسب التكامل: $I = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$, ثم استنتاج قيمة

. 3- تكن $n \in \mathbb{N}^*$ و تكن $S_n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$ نضع $x \in [0; 1]$

. 4- بين أن: $v_n = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$ و $S_n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

. 5- إستنتاج أن: $|v_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n+2}$

. 6- باستعمال مكمّلة بالأجزاء، بين أن: $u_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\ln 2 - v_n)$

. 7- إستنتاج أن المتسلسلة $w_n = (n+1)u_n$ متقاربة نحو عدد حقيقي ينبع تحدده.

التمرين رقم 05 ■

الجزء الأول (03pts)

١- تكـن f الدائـة المـعـرـفـة عـلـى \mathbb{R} بما يـلي :

و يـكـن (C_f) منـحـنـي f فـي مـعـامـدـمـنـظـم (O, \vec{i}, \vec{j}) حـيـثـا الوـحدـة هـي 1cm

أـدرـسـ الفـرعـينـ لـلـانـهـائـيـنـ لـلـمـنـحـنـيـ (C_f) بـجـوارـ $+\infty$ و $-\infty$.

ضـعـ جـدـولـ تـغـيـرـاتـ f ، ثـمـ أـرـسـمـ الـمـنـحـنـيـ (C_f) فـيـ الـمـلـعـمـ (O, \vec{i}, \vec{j})

٢- يـكـنـ $\lambda \in]1; +\infty[$ ، أـحـسـبـ بـدـلـلـةـ λ الـمـسـاحـةـ $A(\lambda)$ للـحـيزـ الـمـسـتوـيـ الـمـحـصـورـ بـيـنـ

وـ الـمـسـتـقـيمـاتـ الـتـيـ مـعـادـلـاتـها~ $y = 0$ وـ $x = \lambda$ وـ إـسـتـنـجـ اـنـ $x = 1$ وـ إـسـتـنـجـ اـنـ $y = 0$

٣- يـكـنـ $f_n(x) = (x-1)^n e^{2-x}$ الدـائـةـ المـعـرـفـةـ عـلـىـ $I = [1; +\infty[$ بما يـلي :

وـ يـكـنـ (C_n) الـمـنـحـنـيـ الـمـثـلـ لـلـدـائـةـ f_n فـيـ الـمـلـعـمـ (O, \vec{i}, \vec{j})

أـدرـسـ الفـرعـينـ لـلـانـهـائـيـنـ لـلـمـنـحـنـيـ (C_n) بـجـوارـ $+\infty$.

ضـعـ جـدـولـ تـغـيـرـاتـ الـدـائـةـ f_n عـلـىـ الـمـجـالـ I .

إـسـتـنـجـ أـنـ $f_n(x) \leq n^n e^{1-n}$ لـدـيـنـا :

أـدرـسـ الـوـضـعـ النـسـبـيـ لـلـمـنـحـنـيـنـ (C_1) وـ (C_2) ، ثـمـ أـرـسـمـ (C_1) فـيـ الـمـلـعـمـ (O, \vec{i}, \vec{j})

الجزء الثاني (02pts)

٤- تـكـنـ φ_n الدـائـةـ المـعـرـفـةـ عـلـىـ $J =]-1; +\infty[$ بما يـلي :

٥- بـيـنـ أـنـ $(\forall x \in J); \varphi'_n(x) = \varphi_n(x) - n\varphi_{n+1}(x)$:

٦- تـكـنـ I_n ، $n \in \mathbb{N}^*$ ، نـصـعـ :

٧- بـيـنـ أـنـ الـمـتـتـالـيـةـ $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تـاقـصـيـةـ وـ إـسـتـنـجـ أـنـهاـ مـتـقـارـبةـ .

٨- بـيـنـ أـنـ لـكـنـ $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$: $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

٩- بـيـنـ أـنـ لـكـنـ $I_n = nI_{n+1} - 1 + \frac{e}{2^n}$: $n \in \mathbb{N}^*$

١٠- أـحـسـبـ الـنـهـاـيـةـ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ ، ثـمـ إـسـتـنـجـ $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1}$

الجزء الثالث (03pts)

١- تـكـنـ $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{f(t)}{(t-1)^2} dt$ الدـائـةـ المـعـرـفـةـ عـلـىـ $[1; +\infty[$ بما يـلي :

٢- بـيـنـ أـنـ F قـابـلـ لـلـشـقـاقـ عـلـىـ $[1; +\infty[$ وـ أـنـ :

✓ إـسـتـنـجـ مـنـحـنـيـ تـغـيـرـاتـ الدـائـةـ F عـلـىـ $[1; +\infty[$

٣- بـيـنـ أـنـ :

$$(\forall t \in]1; +\infty[); 0 \leq \frac{f(t)}{(t-1)^2} \leq \frac{1}{(t-1)^2}$$

٤- إـسـتـنـجـ أـنـ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = (\forall x \in]1; +\infty[); 0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x(1-x)}$$

٥- يـكـنـ $(\forall t \in [x; x+1]); \frac{f(t)}{(t-1)^2} \geq \frac{e^{1-x}}{t-1}$ ، بـيـنـ أـنـ :

✓ إـسـتـنـجـ أـنـ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = (\forall x \in]1; +\infty[); F(x) \geq e^{1-x} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

٦- ضـعـ جـدـولـ تـغـيـرـاتـ الدـائـةـ F ، ثـمـ أـخـطـاـ شـكـلـ الـمـنـحـنـيـ (C_F) فـيـ الـمـلـعـمـ (C_F) فيـ مـعـامـدـمـنـظـمـ .

انتـهىـ المـوـضـوـعـ .

تـخـصـصـ نـقـطـةـ إـضـافـيـةـ لـحـسـنـ التـنـظـيمـ وـ جـوـدـةـ التـحـرـيرـ وـ الـدـقـةـ فـيـ الـأـجـوـبـةـ .

التمرين الإضافي (03pts)

١- أـحـسـبـ التـكـامـلـيـنـ :

$$J = \int_0^\pi \frac{1}{3 + \sin^2 x} dx \quad I = \int_0^1 \sqrt{x - x^2} dx$$

٢- أـحـسـبـ نـهـاـيـةـ الـمـتـتـالـيـةـ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المـعـرـفـةـ بـماـ يـليـ :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n = \frac{1}{n} \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{2^2} + \dots + \sqrt[n]{2^n} \right)$

٣- تـكـنـ f الدـائـةـ المـعـرـفـةـ عـلـىـ \mathbb{R} بما يـليـ :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

٤- أـحـسـبـ نـهـاـيـةـ الـمـتـتـالـيـةـ $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ المـعـرـفـةـ بـماـ يـليـ :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); v_n = \left(\sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) \right) - n$$