الثانية بكالوريا علوم رياضية	فرض منزلـــــي رقم 7	الأستاذ : الحيـــان

التمرين الأول : 4 نقط

لتكن $(G,.)$ زمرة عنصرها المحايد e . نرمز ب a^{-1} لمماثل a

$(a\in G)$. نربط كل عنصر a من G بالتطبيق f_a من G نحو G المعرف بما يلي :

$$\begin{array}{rccc} f & : & G & \rightarrow & G \\ & & x & \mapsto & a.x.a^{-1} \end{array} \qquad . \ \forall x\in G \ : \ f_a(x)=a.x.a^{-1}$$

2 1. بين أن f_a تشاكل تقابلي من G نحو G .

2 2. لتكن $\mathscr{F}$ مجموعة التطبيقات f_a عندما يتغير a في G . أي :

$\mathscr{F} = \{ f_a \ / \ a\in G \}$. بين أن : $(\mathscr{F},\circ)$ زمرة .

التمرين الثاني: 9 نقط

لتكن $(G,.)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد e . لكل x من G ولكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع :

$$(n\in\mathbb{N}^*) \ : \ x^n=\underbrace{x.x....x}_{n \text{ مـــرة}} \quad \text{و} \quad x^0=e$$

نسمي رتبة عنصر x من G، أصغر عدد صحيح طبيعي n غير منعدم بحيث : $x^n=e$.

ونكتب : $o(x)=n$.

1 I. ليكن x عنصرا من G رتبته n ، وليكن m عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $x^m=e$.

بين أن : n/m .

II. ليكن a و b عنصرين من G بحيث : $ab=ba$ ؛ ولتكن p رتبة a و q رتبة b

و s رتبة ab . $\quad (\ s=o(ab)$ و $q=o(b)$ و $p=o(a) \ )$

نفترض أن : $\quad (p,q)\in\mathbb{N}^{*2}$ و $p\wedge q=1$.

1 1. أ- بين أن : $\forall k\in\mathbb{Z} \ : \ (ab)^k=a^k b^k$.

1 ب- بين أن : $(ab)^{pq}=e$.

1 جـ- بين أن : s/pq .

1 2. بين أن رتبة a^q هي p . $\quad (\ o(a^q)=p \ )$.

1 3. أ- بين أن : $(a^q)^s=e$.

1 ب- استنتج أن s مضاعف للعدد p.

1 4. أ- بين أن : q يقسم s . أي (q/s) .

1 ب- استنتج أن : $s=pq$.

نتيجة :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} o(a)=p \\ o(b)=q \\ ab=ba \\ p\wedge q=1 \end{array}\right. \Rightarrow o(ab) = o(a)\times o(b)}$$

التمرين الثالث : 7 نقط

I. لتكن $(A,+,\times)$ حلقة واحدية وليكن a عنصرا من A بحيث :

$$\exists n\in\mathbb{N}-\{0,1\} \ / \ (a^{n-1}\neq 0_A \ \text{و} \ a^n=0_A)$$

1 1. بين أن العنصر a لا يقبل مقلوبا في الحلقة A .

1 2. بين أن (1_A-a) يقبل مقلوبا في الحلقة A .

II. لتكن D مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$.

نضع : $\theta : x\mapsto 0$ و $u : x\mapsto 1$.

ليكن v عنصرا معلوما من المجموعة D . نضع :

$$\mathscr{H}=\{ f\in D \ / \ f'v''-f''v'=\theta \}$$

نفترض أن المجموعة $\mathscr{H}$ ، مزودة بعمليتي جمع الدوال وضرب دالة في عدد حقيقي، فضاء متجهي حقيقي .

1 1. تحقق من أن : $u\in\mathscr{H}$ و $v\in\mathscr{H}$.

2. نفترض أن : $\forall x\in\mathbb{R} \ : \ v'(x)\neq 0$.

1 أ- بين أن $\{u,v\}$ أسرة حرة في الفضاء المتجهي $\mathscr{H}$.

1 ب- بين أن $\{u,v\}$ أساس للفضاء المتجهي $\mathscr{H}$.

2 3. حدد الدالة v إذا علمت أن الدالة $x\mapsto e^{x+1}$ تنتمي إلى $\mathscr{H}$ وأن :

$v(0)=e+1$ و $v'(0)=e$