

<u>2 بالـ علوم رياضية</u>	<u>فرض محروس رقم 02</u>	<u>ثانوية موسى بن نصیر</u>
<u>ذ : عبدالله بن ختير</u>	<u>الدورة الثانية : 2010/2009</u>	<u>نيابة الحميسات</u>

Durée: 04 heure

• التمرين رقم 01 (02pts)

ليكن  $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  ، و نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة :

$$\text{(E)}: z^2 + z - \frac{1}{2}i \sin(2\theta) e^{2i\theta} = 0$$

1)- حدد على الشكل الأسـي حلـيـ المعادلة (E).

2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و منظم  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

و لتكن  $M$  و  $N$  النقاطين اللتين لتقاهمـا على التوازي :  $i \sin \theta e^{i\theta}$  و  $-\cos \theta e^{i\theta}$ .  
أـ أحـسب المسـافـة  $MN$  ، ثـم بـين أـنـ المـتجـهـيـن  $\overrightarrow{ON}$  و  $\overrightarrow{OM}$  مـتعـامـدـاتـ.

بـ إـسـتـنـتـجـ أـنـهـ لـمـ يـتـغـيـرـ اـبـارـامـترـ الـحـقـيقـيـ  $\theta$  عـلـىـ الـمـجـالـ  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  النقـطـاتـ  $M$  و  $N$  تـغـيـرـاتـ عـلـىـ

داـئـرـةـ ثـابـتـةـ (C) يـنـبـغـيـ تحـدـيدـ شـعـاعـهاـ وـ لـقـ مـرـكـزـهاـ.

جـ حـدـدـ قـيـمةـ اـبـارـامـترـ  $\theta$  لـكـيـ يـكـوـنـ المـشـثـ  $OMN$  مـتسـاوـيـ السـاقـيـنـ ، ثـمـ أـرـسـمـ فـيـ هـذـهـ الـحـالـةـ .  
الـدـائـرـةـ (C) وـ الـنـقـطـيـنـ  $M$  وـ  $N$ .

• التمرين رقم 02 (03pts)

1)- ليـكـنـ (a,b) من  $(\mathbb{N}^*)^2$  بحيث :  $a+b=23$

أـ بـينـ أـنـ  $a$  وـ  $b$  أـوـيـاتـ فيما يـبـنـهـماـ .  
 $a \wedge b = 1$

بـ إـسـتـنـتـجـ  $a$  وـ  $b$  عـلـمـاـنـ :  $a < b$  وـ  $b > a$

2)- حلـيـ المـجـمـوعـةـ  $\mathbb{Z}^2$  المعـادـلـةـ :  $9x - 14y = 1$

3)- أـ حلـيـ  $\mathbb{Z}$  النـظـمـةـ التـالـيـةـ :  
 $(S): \begin{cases} x \equiv 4 [9] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases}$

بـ ليـكـنـ  $x$  حلـيـ  $\mathbb{Z}$  للـنظـمـةـ (S) ، حـدـدـ باـقـيـ القـسـمـةـ الـأـقـلـيـدـيـةـ لـ  $x$  عـلـىـ 126ـ .

• التمرين رقم 03 (03pts)

ليـكـنـ  $n \in \mathbb{N}^*$  وـ نـصـعـ :  $S_n(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}$  ، حيث  $t \neq 1$  وـ  $t \in \mathbb{Z}$

1)- بـينـ أـنـ :  $t^n \wedge (1-t)$  ،  $t^n + (1-t)S_n(t) = 1$

2- في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم  $(D_n)$  ، نعتبر المستقيم

$$\text{الذي معادته : } (E_n) : 3^n x - 2y = 1.$$

أ- باستعمال السؤال 1)- حدد حالا خاصا للمعادلة  $(E_n)$  في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

ب- حل في  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  المعادلة  $(E_n)$ .

ج- هل توجد نقط من المستقيم  $(D_n)$  إحداثياتها صحيحة نسبية و تنتمي إلى الدائرة  $(C)$  التي مرکزها  $O$  و شعاعها  $r = S_n(3)$  ؟ على جوابك .

### • التمرين رقم 04 pts:

ليكن  $a \in \mathbb{R}^{*+}$  و  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المتسلسلة المعرفة بما يلي :

$$\text{. } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \sum_{k=0}^n \frac{a^k}{k!} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^n}{n!}$$

1)- باستعمال متكاملة بالأجزاء ، بين أن :  $e^a = 1 + a + \int_0^a (a-t)e^t dt$

2)- لكل  $n \in \mathbb{N}^*$  ، نضع :  $K_n = \frac{1}{n!} \int_0^a (a-t)^n e^t dt$  ، بين أن :

3)- بين أن :  $e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + K_n$

4)- بين أن :  $0 \leq K_n \leq \frac{a^n}{n!} (e^a - 1)$

5)- لكل  $n \in \mathbb{N}$  ، نضع :  $v_n = \frac{a^n}{n!}$

أ- بين أنه يوجد  $n_0 \in \mathbb{N}$  من حيث :  $n \geq n_0 \Rightarrow v_{n+1} \leq \frac{1}{2} v_n$

ب- بين أن :  $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n_0}$

ج- استنتج النهاية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots + \frac{a^n}{n!}\right)$

### • التمرين رقم 05 pts:

الجزء الأول:

تكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  بما يلي :

$$\text{. } (\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); f(x) = \frac{\ln x}{x-1} \text{ و } f(1) = 1$$

1- أ- بين أن  $f$  متصلة على  $[0; +\infty[$ .

ب- أحسب النهايتين  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .

2- ليكن  $t$  عنصرا من المجال  $]-1; +\infty[$ .

أ- بين أن :  $\left| \int_0^t \frac{u^2}{1+u} du \right| \leq t^2 |\ln(1+t)|$

ب- بين أن :  $\int_0^t \frac{u^2}{1+u} du = \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2}$

ج- استنتج أن  $f$  قابلة للإشتقاق في النقطة  $x_0 = 1$  وأن :  $f'(1) = -\frac{1}{2}$

3- أدرس تغيرات الدالة  $f$  ، ثم أرسم المنحني  $(C_f)$  في معلم متعامد و منظم .

4- أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[); f\left(\frac{1}{x}\right) = xf(x)$

ب- الجزء الثاني : (04pts)

تكتن  $G$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

.  $G(x) = \int_x^{x^2} f(t) dt; x \neq 0$  و  $G(0) = 0$

1- أ- بين أن الدالة  $G$  معرفة على المجال  $]-1; +\infty[$ .

2- أ- بين أن :  $(\forall x \in ]0; +\infty[); \frac{2x \ln x}{x+1} \leq G(x) \leq x \ln x$

ب- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة  $G$  على اليمين في الصفر .

3- أ- أحسب النهاية :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$

ب- أ- بين أن :  $(\forall u \in ]0; 1[); G\left(\frac{1}{u}\right) = - \int_u^{u^2} \frac{f(t)}{t} dt$

ج- أ- بين أن :  $u = \frac{1}{x}$  (يمكنك وضع  $u$  و إستعمال مبرهنة المتوسط).

4- نضع :  $x \in ]0; +\infty[$  تكن  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

أ- عبر عن  $G(x)$  بدلالة  $(x^2)$  و  $F(x)$  تكن  $F(x)$

ب- أدرس تغيرات الدالة  $G$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

5- أرسم منحني  $G$  في معلم متعامد و منظم (نعطي) :

انتهي الموضوع .