الحساب العددي

1) التناسبية؛ النسب المئوية؛ السلم

تمهيد :

نقول عن قياسين أنهما متناسبان عندما يمكننا الانتقال من الأول الى الثاني عن طريق الضرب في عدد ثابت يسمى معامل التناسب.فمثلا إذا كان ثمن التفاح في السوق هو 6 دراهم للكيلوغرام ، فهناك تناسب بين ثمن الشراء ووزن التفاح معامل التناسب هو 6 . أي $(6DH;1kg)$ .. $(18DH;3kg)$...$(9DH;1,5kg)$

أنشطة :

• اشترت إحسان سروالا و قميصا بما قدره $105DH$. إذا علمت أن ثمني السروال و القميص متناسبان على التوالي مع العددين 9 و 6 ، فاحسب ثمن كل منهما.

ليكن x ثمن السروال و y ثمن القميص. بما أن ثمني السروال و القميص متناسبين على التوالي مع 9 و 6 فإن : $\frac{x}{9}=\frac{y}{6}=\frac{x+y}{15}=\frac{105}{15}=7$. من $\frac{x}{9}=7$ نستنتج أن $x=7\times 9=63$ و من $\frac{y}{6}=7$ نستنتج أن $y=7\times 6=42$

• ارتفع ثمن البنزين من $5,20DH$ الى $5,98$ للتر الواحد ، ما نسبة الزيادة ؟

ليكن t نسبة الزيادة ، لدينا : $5,98=5,20+\left(\frac{t}{100}\times 5,20\right)=5,20\left(1+\frac{t}{100}\right)$ أي

$t=\left(\frac{5,98}{5,20}-1\right)\times 100=15$ إذن النسبة هي 15% .

• ثمن آلة حاسبة هو $150DH$. إذا علمت أن نسبة التخفيض 10% ، فاحسب ثمن الآلة الحاسبة بعد عملية التخفيض.

ليكن x ثمن الآلة الحاسبة بعد عملية التخفيض . لدينا :

$$\begin{aligned}x&=150-\frac{10}{100}\times 150\\&=150\left(1-\frac{10}{100}\right)\\&=150\times 0,9\\&=135\end{aligned}$$

قواعد :

1) نقول إن الأعداد غير المنعدمة a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

2) أ- نعبر عن الجملة التالية (الكمية y هي $t\%$ من الكمية x) ب $y=\frac{t}{100}x$

ب- إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة الزيادة فإن الكمية بعد عملية الزيادة هي : $x\left(1+\frac{t}{100}\right)$

ج- إذا كان x هو الكمية و $t\%$ نسبة التخفيض فإن الكمية بعد عملية التخفيض هي :

$$x\left(1-\frac{t}{100}\right)$$

أنشطة

• إذا علمت أن الطول الحقيقي لطريق سيار هو $200km$ فاحسب:

- طول هذه الطريق عل خريطة ذات السلم $\frac{1}{500}$

طول هذه الطريق على خريطة ذات السلم $\frac{1}{500}$ هو : $\frac{1}{500}\times 200=0,4km$

•مساحة شقة $99m^2$. حدد مساحة هذه الشقة على تصميم بسلم $\frac{1}{100}$ و على تصميم بسلم 2

على تصميم بسلم $\frac{1}{100}$ هي : $\left(\frac{1}{100}\right)^2\times 99=0,0099m^2$ تصغير

على تصميم بسلم 2 هي : $(2)^2\times 99=4\times 99=396m^2$ تكبير

2) المعادلات

تذكير

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

$$\boxed{\begin{array}{l}(x-2)(x+4)=0;x^2-3x^4=0;9x^2=81x\\ \frac{4x-6}{-x+5}=0;\frac{5}{x+3}=\frac{4}{7};\frac{x+1}{3x+4}=\frac{3}{2};\frac{5x-3}{x^2-2}=0\end{array}}$$

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}(x-2)(x+4)=0 &\Leftrightarrow (x-2=0)ou(x+4=0)\\ &\Leftrightarrow (x=2)ou(x=-4)\end{aligned}$$

أي $S=\{2;-4\}$

• لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned}x^2-3x^4=0 &\Leftrightarrow x^2\left(1-3x^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(1^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2\right)=0\\ &\Leftrightarrow x^2\left(1-\sqrt{3}x\right)\left(1+\sqrt{3}x\right)=0\\ &\Leftrightarrow \left(x^2=0\right)ou\left(1-\sqrt{3}x=0\right)ou\left(1+\sqrt{3}x=0\right)\\ &\Leftrightarrow (x=0)ou\left(x=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)ou\left(x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\end{aligned}$$

أي $S=\left\{0;-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

• $(E):\frac{4x-6}{-x+5}=0$

لتكن D مجموعة تعريف المعادلة (E) . لدينا :

$$D=\{x\in\mathbb{R}/-x+5\neq 0\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 5\}$$
$$=\mathbb{R}-\{5\}$$

لكل x من $\mathbb{R}-\{5\}$ لدينا :

$$\frac{4x-6}{-x+5}=0\Leftrightarrow 4x-6=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{6}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$$

أي $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

نعتبر ثلاثيات الحدود التالية : $P(x)=x^2-3x+2$ و $Q(x)=2x^2-4x+2$ و $K(x)=x^2-2x+4$

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلات : $P(x)=0$ و $Q(x)=0$ و $K(x)=0$

2) ادرس إشارة ثلاثيات الحدود $P(x)$ و $Q(x)$ ثم $L(x)$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات $p(x)\geq 0$ و $Q(x)\prec 0$ ثم $K(x)\succ 0$

1) • $P(x)=0$

نحسب مميز المعادلة $x^2-3x+2=0$. في هذا المثال $(a=1)$ ، $(b=-3)$ ، $(c=2)$

بما أن :

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-3)^2-4\times 1\times 2$$
$$=9-8$$
$$=1\succ 0$$

فإن للمعادلة حلين مختلفين هما :

$$x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{3+1}{2}$$
$$=2$$

أو

$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{3-1}{2}$$
$$=1$$

إذن $\boxed{S=\{1;2\}}$

• $Q(x)=0$

نحسب مميز المعادلة $2x^2-4x+2=0$ في هذا المثال $(a=2)$ ، $(b=-4)$ ، $(c=2)$

بما ان :

$$\Delta = b^2 - ac$$
$$= (-4)^2 - 4\times 2\times 2$$
$$= 0$$

فإن للمعادلة حل مزدوج هو :

$$x = \frac{-b}{2a}$$
$$= \frac{4}{2\times 2}$$
$$= 1$$

إذن $\boxed{S = \{1\}}$

• $K(x) = 0$

نحسب مميز المعادلة $x^2 - 2x + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (2)^2 - 4\times 1\times 4$$
$$= 4 - 16$$
$$= -12 \prec 0$$

بما أن : فإن المعادلة ليس لها حلا. أي $S = \{\ \}$

2) • $P(x)$

نعلم أن للثلاثية $x^2 - 3x + 2$ جذرين مختلفين هما 1 و 2 .

الثلاثية تنعدم عند الجذرين ، لها إشارة العدد 1 خارج الجذرين و عكس إشارة العدد 1 داخل الجذرين

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	—	0	+	

• $Q(x)$

بما أن للثلا ثية $2x^2 - 4x + 2$ جذر مزدوج أي $\Delta = 0$ فإنها تنعدم عند الجذر 1 و إشارتها هي إشارة العدد 2

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$2x^2-4x+2$		$+$	0	$+$	

• $K(x)$

بما أن مميز الثلاثية x^2-2x+4 سالب قطعا فإن إشارتها هي إشارة العدد 1 أي دائما موجبة قطعا.

3) • $p(x)\geq 0$

تبعا لجدول إشارة الثلاثية $P(x)$ فإن $S=]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$

• $Q(x)\prec 0$

تبعا لفقرة دراسة إشارة الثلاثية $Q(x)$ فإن $S=\{\ \}$

• $K(x)\succ 0$

تبعا لفقرة إشارة الثلاثية $K(x)$ فإن $S=\mathbb{R}$

نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

نشاط

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمة التالية بطريقتين مختلفتين : $\begin{cases}2x+5y=1\\x+3y=4\end{cases}$

الطريقة التآلفية الخطية

$$\begin{cases}2x+5y=1\ (\times 1)\\x+3y=4\ (\times -2)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}2x+5y=1\\-2x-6y=-8\end{cases}$$

$$0x-y=-7 \Rightarrow y=7$$

$$\begin{cases}2x+5y=1\ (\times 3)\\x+3y=4\ (\times -5)\end{cases}$$

$$+\begin{cases}6x+15y=3\\-5x-15y=-20\end{cases}$$

$$x+0y=-17 \Rightarrow x=-17$$

إذن $S=\{(-17;7)\}$

طريقة التعويض

$$\begin{cases}2x+5y=1\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+5y=1\\x=4-3y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(4-3y)+5y=1\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y=1-8\\x+3y=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x+3y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x+21=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=7\\x=-17\end{cases}\Rightarrow S=\{(-17;7)\}$$

طريقة المحددة

تعريف:

نعتبر نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c\end{cases}$

-العدد $\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$ يسمى محددة النظمة (S)

نضع $\Delta_x=\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}=cb'-c'b$ و $\Delta_y=\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}$

خاصية

نعتبر نظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين : $(S):\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c\end{cases}$

إذا كان $\Delta\neq 0$ فإن النظمة (S) تسمى نظمة كرامر و لها حل وحيد (x,y) حيث $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}$ و $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}$

- إذا كانت $\Delta=0$ و $\Delta_x=\Delta_y=0$ فإن للنظمة (S) ما لانهاية من الحلول حيث $S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\,ax+by=c\}$
- إذا كانت $\Delta=0$ و ($\Delta_x\neq 0$ أو $\Delta_y\neq 0$) فإن $S=\{\}$

تمرين تطبيقي

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

$$(S_1):\begin{cases}x-3y=1\\2x+8t=2\end{cases};(S_2):\begin{cases}x-3y=1\\2x-6y=2\end{cases};(S_3):\begin{cases}x-3y=1\\3x-9y=2\end{cases}$$