ثانوية ابن خلدون التأهيلية

المادة: الرياضيات

درس رقم 7/

الأستاذ: نجيب عثماني

ملخص لدرس: الدوال العددية

مستوى الجذع مشترك أدبي

I. مفهوم دالة عددية

تعريف: ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$.

نسمي f دالة عددية معرفة على D (أو f دالة من D نحو $\mathbb{R}$)، كل علاقة تربط كل عنصر x من D بعنصر وحيد من $\mathbb{R}$ ، يرمز له بالرمز $f(x)$.

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x) = -2x$

أنقل و أتمم الجدول التالي:

x	1			$\frac{5}{2}$		
$f(x)$		-6	-1		$\frac{2}{7}$	13

II. مجموعة تعريف دوال عددية:

تعريف:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x .

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة المكونة من جميع الأعداد الحقيقية x بحيث $f(x)$ موجود أي $f(x)$ قابلة للحساب. و يرمز لها غالبا بالرمز D_f بمعنى: $x \in D_f$ تكافئ $f(x) \in \mathbb{R}$.

ملحوظة: نقول إن f دالة عددية معرفة على A إذا كان A جزءا من D_f .

اصطلاحات: لتكن f دالة عددية معرفة على D نكتب: $f : D \to \mathbb{R}$

$$x \to f(x)$$

- المجموعة D تسمى مجموعة تعريف الدالة f .
- ليكن x عنصرا من D ، بحيث: $y = f(x)$
  - ← y يسمى صورة x بالدالة f .
  - ← العنصر x يسمى سابق العنصر y .
- الدالة f تسمى كذلك دالة عددية لمتغير حقيقي.

المستوى المنسوب إلى معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ غالبا يكون متعامدا ممنظما.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x) = \dfrac{2x}{4x^2 - 1}$

حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f

III. التمثيل المبياني لدالة عددية:

تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

التمثيل المبياني C_f للدالة f (أو منحنى الدالة f) هو مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوى بحيث:

- الأفصول x يتغير في مجموعة التعريف D .
- الأرتوب y هو صورة x بالدالة f .

بمعنى $x \in D$ و $y = f(x)$.

الأستاذ: عثماني نجيب

هذا التعريف يعني: إذا كان $M(x,y)\in C_f$ فان $x\in D$ و $y=f(x)$.

إذا كان $x\in D$ و $y=f(x)$ فان $M(x,y)\in C_f$.

العلاقة $y=f(x)$ تسمى معادلة ديكارتية للمنحنى C_f في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي: $f(x)=x^2$

أرسم التمثيل المبياني للدالة f.

IV. الدالة الزوجية- الدالة الفردية:

أ) الدالة الزوجية:

تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

نقول إن f دالة زوجية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=f(x)$

لكل x من D_f, $-x$ تنتمي إلى D_f يعني أن D_f متماثل بالنسبة للعدد 0.

خاصية: (التأويل المبياني لدالة زوجية)

لتكن f دالة عددية لمتغير x حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة زوجية إذا و فقط إذا كان محور الأراتيب محور تماثل المنحنى C_f.

ملاحظة: إذا كانت f دالة زوجية (على التوالي فردية) فانه يكفي إنشاء C_f على $D_f\cap\mathbb{R}^+$ و بالتماثل بالنسبة لمحور الأراتيب (على التوالي بالنسبة لأصل المعلم) نحصل على المنحنى C_f بكامله.

ب) الدالة الفردية:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تعريف:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها

نقول أن f دالة فردية إذا تحقق الشرطان التاليان:

- ❖ لكل x من D_f لدينا: $-x$ تنتمي إلى D_f.
- ❖ لكل x من D_f لدينا: $f(-x)=-f(x)$

خاصية: (التأويل المبياني لدالة فردية)

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي و C_f منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

تكون f دالة فردية إذا و فقط إذا كانت النقطة 0 مركز تماثل المنحنى C_f.

V. تغيرات دالة عددية:

1. تعريف:

لتكن f دالة عددية معرفة على المجال I.

❖ نقول إن الدالة f تزايدية قطعا (تناقصية قطعا) على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل, إذا كان $x_1\prec x_2$ فان $f(x_1)\prec f(x_2)$
$(f(x_1)\succ f(x_2))$

❖ نقول إن الدالة f ثابتة على المجال I, إذا و فقط إذا كان لكل x_1 و x_2 من I لدينا: $f(x_1)=f(x_2)$

2. جدول تغيرات دالة:

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و D_f مجموعة تعريفها.

دراسة منحى تغيرات الدالة f, يعني تجزيء المجموعة D_f إلى أكبر مجالات ممكنة تكون فيها الدالة f تزايدية أو تناقصية قطعا أو ثابتة.

و نلخص نتائج هده الدراسة في جدول, يسمى جدول تغيرات الدالة f, بحيث السهم $\nearrow$ (تصاعدي) يعني أن f تزايدية قطعا, و السهم $\searrow$ (تنازلي) يعني أن تناقصية f قطعا و السهم $\longrightarrow$ (أفقي) يعني أن f ثابتة.

3. رتابة دالة f على مجال:

تعريف:
لتكن دالة عددية معرفة على مجال I.
نقول إن f رتيبة قطعا على المجال I إذا كانت تزايدية قطعا على I أو تناقصية قطعا على I.

VI. دراسة بعض الدوال الاعتيادية

الدالة: $x \mapsto ax+b$ $(a \neq 0)$

مثال 1: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x+1$
أرسم التمثيل المبياني للدالة f.
ملاحظة : التمثيل المبياني للدالة f هو مستقيم
مثال 2: $f(x)=4x$
و تحديد جدول التغيرات.

الدالة: $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم.
نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=ax^2$ و (P) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم.

زوجية الدالة f :
ليكن $x \in \mathbb{R}$: لدينا $-x \in \mathbb{R}$: $f(-x)=a(-x)^2$, إذن $f(-x)=f(x)$ و منه f دالة زوجية.

تغيرات f:
خاصية:
- إذا كانت $a \succ 0$: الدالة f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$.
- إذا كانت $a \prec 0$: الدالة f تناقصية قطعا على $[0,+\infty[$ و تزايدية قطعا على $]-\infty,0]$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

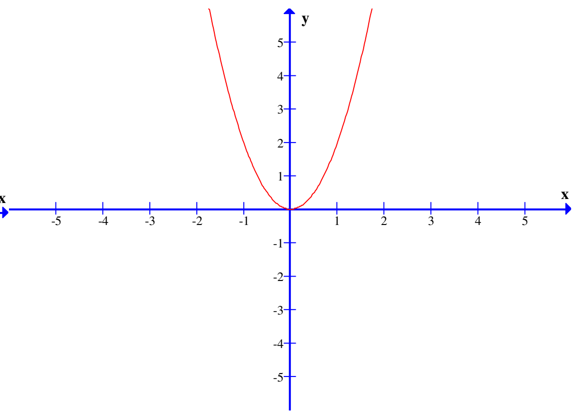
الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$-\infty$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$

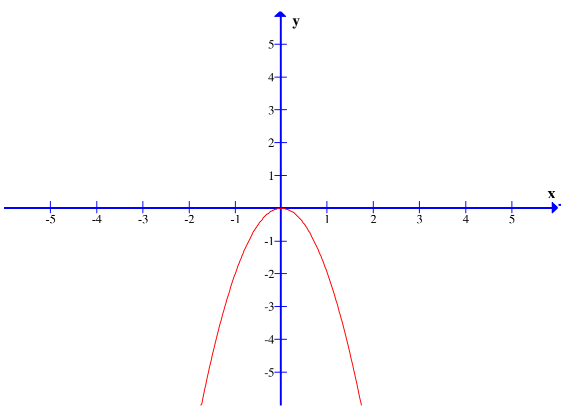
التمثيل المبياني للدالة f:
بما أن f دالة زوجية فانه يكفي أن نمثلها على $\mathbb{R}^+$.
ثم نتمم المنحنى (P) باستعمال التماثل المحوري بالنسبة لمحور الأراتيب.
تعريف: المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto ax^2$ $(a \neq 0)$ يسمى شلجما.
النقطة أصل المعلم تسمى رأس الشلجم.

كل منحنى يقبل معادلة على شكل $Y=aX^2$ حيث $a \neq 0$ في معلم $(\Omega;\vec{i};\vec{j})$ يسمى شلجما رأسه Ω و محور تماثله هو محور الأراتيب (ΩY).

حالة: $a \succ 0$



حالة: $a \prec 0$



الأستاذ: عثماني نجيب

الدالة: $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة بما يلي: $f(x) \mapsto \frac{a}{x}$ و (H) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

مجموعة التعريف: مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

زوجية الدالة f : ليكن x من D_f , لدينا $-x \in D_f$ و $f(-x) = f(x)$ إذن f دالة فردية.

تغيرات f:

خاصية:

- إذا كان $a \succ 0$ فان الدالة f تناقصية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.
- إذا كان $a \prec 0$ فان الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

الحالة: $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$

الحالة: $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$

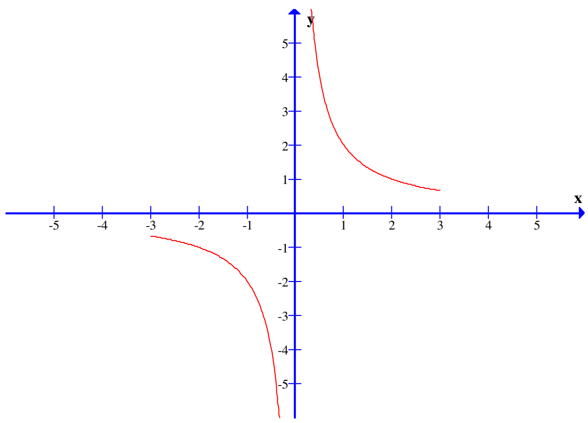
التمثيل المبياني للدالة f :

بما أن f دالة فردية فانه يكفي أن نمثل f على $]0,+\infty[$, ثم نتمم منحنى الدالة f على باستعمال التماثل المركزي الذي مركزه O أصل المعلم.

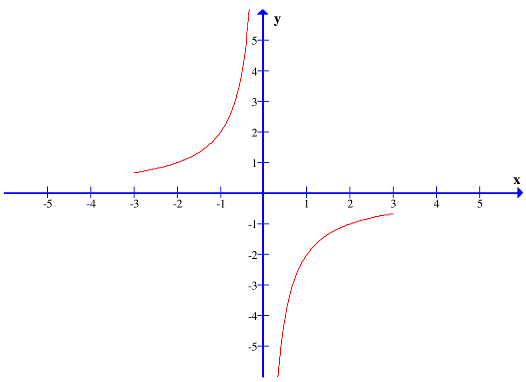
تعريف:

منحنى الدالة $x \mapsto \frac{a}{x}$ $(a \neq 0)$ يسمى هذلولا مركزه O أصل المعلم و مستقيماه المقاربان هما $x = 0$ و $y = 0$.

حالة: $a \succ 0$



الحالة: $a \prec 0$



مثال 1: دراسة و تمثيل الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{2}{x}$

مثال 2: دراسة و تمثيل الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \frac{-3}{x}$

التمثيل المبياني و تغيرات الدالة: $x \mapsto ax^2 + bx + c$

مثال: نعتبر الدالة العددية f المعرفة كالتالي: $f(x) = 2x^2 + 4x - 2$

1. أنقل و أتمم الجدول التالي:

$f(x)$							
x	2	1	0	-1	-2	-3	-4

2. أرسم التمثيل المبياني للدالة f.

ملاحظة : التمثيل المبياني للدالة f يسمى شلجما رأسه $S\left(-1;0\right)$ و محوره $(D): x=-1$.

الأستاذ: عثماني نجيب