

I. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

أمثلة:

مثال 1: $2x - 22 = 0$

مثال 2: $3(2x + 5) = 6x - 8$

مثال 3: $4(x - 2) = 6x - 2(x + 4)$

مثال 4: حل في المعادلات التالية:

$$(2x + 3)(9x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

مثال 5: حل في المعادلات التالية:

$$\frac{2x + 2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5x - 2}{2} + \frac{1}{3}$$

مثال 6: $7x^3 - x = 0$

II. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد:

1. تعريف و خاصية:

تعريف: المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ حيث x هو المجهول و a و b و c أعداد حقيقية معلومة ($a \neq 0$) تسمى معادلة من الدرجة الثانية بمجهول واحد.

مثال 1:

العدد 1- حل للمعادلة $3x^2 + 5x + 2 = 0$

لأن: $3(-1)^2 + 5(-1) + 2 = 0$

مثال 2:

العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3} = 0$

لأن: $(\sqrt{3})^2 + (1 - \sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3} - 3 - \sqrt{3} = 0$

ملاحظة :

كل عدد حقيقي x_0 يحقق المتساوية $ax^2 + bx + c = 0$ هو حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ و يسمى جذر للحدودية $ax^2 + bx + c$.

تعريف:

لتكن ثلاثية الحدود $P(x) = ax^2 + bx + c$.

العدد الحقيقي $b^2 - 4ac$ يسمى مميز ثلاثية الحدود أو مميز المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ و نرمز له بالرمز Δ .

مثال:

نعتبر المعادلة $(E): 3x^2 - 5x + 7 = 0$

لنحسب مميز المعادلة (E)

لدينا: $a = 3$ و $b = -5$ و $c = 7$ بما أن: $\Delta = b^2 - 4ac$

فان: $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 7 \times 3 = 25 - 84 = -59$

ملاحظة : الرمز Δ يقرأ: دلتا.

2. خاصية:

نعتبر المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) و ليكن Δ مميزها.

✓ إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة ليس لها حل في $\mathbb{R}$.

✓ إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا هو: $-\frac{b}{2a}$.

✓ إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما: $\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

نرمز لمجموعة حلول المعادلة بالرمز S .

مثال 1:

المعادلة $3x^2 + x + 2 = 0$ ليس لها حلا في $\mathbb{R}$. لأن $\Delta < 0$ ($\Delta = 1 - 4 \times 3 \times 2 = -23$) و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \emptyset$.

مثال 2:

المعادلة $x^2 - 10x + 25 = 0$ لها حل وحيد لأن $\Delta = 0$ ($\Delta = 10^2 - 4 \times 25 = 0$).

حل هذه المعادلة هو: $-\frac{b}{2a} = 5$ و بالتالي مجموعة حلولها هي $S = \{5\}$.

مثال 3:

نعتبر المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$ لدينا $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1$ بما أن $\Delta > 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \text{ و } x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ و منه } S = \{1; 2\}.$$

3. تعميل ثلاثية الحدود: $ax^2 + bx + c$ **خاصية:**

نعتبر ثلاثية الحدود $ax^2 + bx + c$ وليكن Δ مميزها.

1. إذا كان: $\Delta > 0$ فإن المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ تقبل حلين مختلفين x_1 و x_2 .

$$\text{و لدينا: } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2. \text{ إذا كان: } \Delta = 0 \text{ فإن: } ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

3. إذا كان: $\Delta < 0$ فإن: $ax^2 + bx + c$ لا يمكن تعميلها إلى حدوديتين من الدرجة الأولى.

مثال:

نعتبر الحدودية $R(x) = 6x^2 - x - 1$ مميز الحدودية $R(x)$ هو $\Delta = 1 + 24 = 25$.

إذن حلا المعادلة $R(x) = 0$ هما $x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ و $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ و بالتالي: $R(x) = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

إشارة الحدانية: $ax + b$ $a \neq 0$

ملخص:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	إشارة a	0 عكس إشارة a	إشارة a

مثال 1: لنحدد إشارة $2x + 1$

لدينا $2x + 1 = 0$ يكافئ $x = -\frac{1}{2}$

و بما أن $a = 2$ و $a > 0$ جدول إشارة $2x + 1$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x + 1$	-	0	+

مثال 2: لنحدد إشارة $-x + 2$
 لدينا $-x + 2 = 0$ يكافئ $x = 2$
 و بما أن: $a = -1$ و $a < 0$ فإن جدول إشارة $-x + 2$ هو كالتالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x + 2$	-	0	+

مثال 3: حدد إشارة: $2x - 4$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2x - 4 \geq 0$

مثال 4: حدد إشارة: $-3x + 9$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $-3x + 9 < 0$

IV. متراجحات توول في حلها الى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد:

مثال 1: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

$$(-5x + 20)(3x - 7) \geq 0$$

مثال 2: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9x^2 - 25 < 0$

مثال 3:

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

V. النظم:

1. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين:

مثال و أنشطة:

حل في $\mathbb{R}^2$ المعادلة: $5x + 7y + 3 = 0$

2. **نظمة معادلتين:**

طريقة التعويض:

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ 5x + 2y = -19 \end{cases} \quad \text{مثال: حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظمة التالية:}$$

طريقة الخطية:

$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ 9x - 5y = 3 \end{cases} \quad \text{مثال: حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظمة التالية:}$$

طريقة المحددة:

مثال:

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases} \quad \text{حل في } \mathbb{R}^2 \text{ النظمة:}$$

محددة النظمة (1) هي: $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 6$ و منه النظمة تقبل حلا وحيدا:

$$\text{هو } x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{12}{6} = 2 \text{ و } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ و منه حل النظمة هو الزوج } (2, 1)$$