ثانوية ابن خلدون التأهيلية

مستوى الجذع مشترك أدبي

الدرس الثاني : الترتيب في $\mathbb{R}$

الأستاذ: نجيب عثماني

I. تعاريف:

ليكن a و b عددين حقيقيين.

1. نقول إن a أصغر من أو يساوي b , و نكتب $a \leq b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$
2. نقول إن a أكبر من أو يساوي b , و نكتب $a \geq b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^{+}$
3. نقول إن a أصغر قطعا من b , و نكتب $a \prec b$, إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$
4. نقول إن a أكبر قطعا من b , و نكتب $a \succ b$, إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$

ملحوظة:

a و b عددان حقيقيان.

- $a \leq b$ يكافئ $a \prec b$ أو $a = b$
- إذا كان $a \prec b$ فان $a \leq b$
- مقارنة a و b يعني البحث عن التعبير الصحيح من بين التعابير التالية: $a \prec b \ , \ a \succ b \ , \ a = b$

أمثلة: لدينا: $\sqrt{5} \prec 3$, $-7 \prec -\frac{1}{3}$, $\pi \succ 2{,}14$

نضع $a = 2+\sqrt{3}$ و $b = 2\sqrt{3}$

لدينا $a-b = 2-\sqrt{3}$, و بما أن $2-\sqrt{3}$ عدد حقيقي موجب قطعا أي: $(a-b) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ فان: $a \succ b$

II. خاصيات:

لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية:

إذا كان $a \leq b$ و $b \leq c$ فان $a \leq c$

ملحوظة:

إذا كان $a \leq b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نقس العدد b.

مثال:

لدينا: $1 \prec \frac{30}{31}$ و $\frac{114{,}01}{114} \succ 1$ و منه فان: $\frac{114{,}01}{114} \succ \frac{30}{31}$

خاصية الترتيب و الجمع:

- $a \leq b$ يكافئ $a+c \leq b+c$
- إذا كان $a \leq b$ و $c \leq d$ فان $a+c \leq b+d$
- إذا كان $a \geq 0$ و $b \geq 0$ فان $a+b \geq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \leq bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \leq b$ يكافئ $ac \geq bc$
- إذا كان $0 \leq a \leq b$ و $0 \leq c \leq d$ فان $0 \leq ac \leq bd$
- إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ فان $a+b \leq 0$ و $ab \geq 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب:

a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$

- $a \leq b$ يكافئ $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$

- إذا كان $a \leq b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

- $a \leq b$ يكافئ $a^2 \leq b^2$
- $a \leq b$ يكافئ $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
- لكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \geq 0$

ملحوظة:

جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\leq$ بأحد الر موز: $\geq$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \leq 0$ و $b \leq 0$ $a \leq b$ يكافئ $a^2 \geq b^2$

أمثلة

مثال1: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

قارن: $a^2 + b^2$ و $2ab$.

مثال2: لتكن $1 \leq x \leq 5$ و $7 \leq y \leq 8$

أعط تأطيرا لكل من $x+y$, $x-y$, $2x$, $3x-2y$, $\frac{x}{y}$

III. المجالات:

ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$. ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات و تمثيلها على المستقيم العددي.

المجالات المحدودة:

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \leq x \leq b$
$]a,b]$	$a \prec x \leq b$
$[a,b[$	$a \leq x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجالات غير المحدودة

المجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \geq b$
$]-\infty,a]$	$x \leq a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

مصطلحات:

الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة:

$\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$

$\mathbb{R}^*_+ =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^*_- =]-\infty,0[$