I. مجموعات الأعداد

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب: $\mathbb{N}=\{0;1;2;\cdots\}$
- الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ و نكتب: $\mathbb{Z}=\{\cdots-3;-2;0;1;2;3;\cdots\}$
- الأعداد العشرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث: $a\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$ تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D و نكتب: $D=\left\{\frac{a}{10^n}/a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}\right\}$
- الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث: $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}^*$, تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$. و نكتب $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$
- الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

على مستقيم (D) مزود بمعلم (O,I),

- كل عدد حقيقي يمكن أن نربطه بنقطة وحيدة من المستقيم (D).

عكسيا, كل نقطة M من المستقيم (D) تمثل عدد حقيقيا وحيدا x يسمى أفصولها.

أمثلة : استعمال الرموز: $\in;\notin;\subset;\not\subset$

العدد -7 هو عنصر من $\mathbb{Z}$ نكتب $-7\in\mathbb{Z}$ نقرأ: "-7 ينتمي الى $\mathbb{Z}$ " في حين -7 لا ينتمي الى $\mathbb{N}$ و نكتب $-7\notin\mathbb{N}$

لدينا $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ و $\frac{2}{3}\notin D$ و ذلك لأنه لا يمكن كتابة $\frac{2}{3}$ على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين a و b بحيث $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و b غير منعدم.

كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ توجد ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة D ليست ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $D\not\subset\mathbb{Z}$.

لأي هناك عناصر من D لا تنتمي الى $\mathbb{Z}$. كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من $\mathbb{Q}$: $D\subset\mathbb{Q}$

و كل عنصر من $\mathbb{Q}$ هو عنصر من $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. لدينا اذن: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset D\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

تمرين : حدد طبيعة كل عدد من الأعداد التالية: $\sqrt{9}+3$, $\frac{6}{5}$, $-\frac{\sqrt{100}}{5}$

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ وخاصياتها

1. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$

الجمع في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية

1) $a+b=b+a$
2) $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$
3) $a+0=0+a=a$
4) $(-a)+a=a+(-a)=0$

الضرب في $\mathbb{R}$

a و b و c أعداد حقيقية

1. $a\times b=b\times a=ab=ba$
2. $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$
3. $a\neq 0; a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=\frac{a}{a}=1$

العمليات على الكسور: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd\neq 0$

1) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$

2) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

3) $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

4) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

5) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

6) $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}; bc\neq 0$

7) $-a$ يسمى مقابل a

8) $a-b=a+(-b)$

9) $-(a-b)=-a+b$

10) $\frac{1}{a}$ يسمى مقلوب العدد a حيث $a\neq 0$

العدد $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}^*$ يسمى خارج العدد a على b. $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

11) $\frac{a}{b}=c$ يكافئ $a=bc$

12) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكافئ $ad=bc$

13) $\frac{a}{b}=1$ يكافئ $a=b$

14) $\frac{a}{b}=0$ يكافئ $a=0$

2. متطابقات هامة_النشر و التعميل:

لكل a و b من $\mathbb{R}$ لدينا: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

1) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

2) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab-b^2)$

الأستاذ: نجيب عثماني

النشر و التعميل:

a و b و k أعداد حقيقية

- $k(a+b)=ka+kb$
- $k(a-b)=ka-kb$
- $(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$
- $x^2+2x+1=(x+1)^2$
- $x^2-2x+1=(x-1)^2$

ملحوظة:

ننشر $(a+b)(a+b)^2$ و $(a-b)(a-b)^2$ و نحصل على المتطابقتين الهامتين التاليتين:

- $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

مثال: عندما تعجز الآلة الحاسبة

أحسب: $A=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحدتها

لتبسيط الحساب نضع: $x=200520052006$

إذن: $200520052005=x-1$ و $200520052007=x+1$.

و منه: $A=x^2-(x-1)(x+1)$

$$=x^2-(x^2-1)$$

$$=x^2-x^2+1$$

$$=1$$

إذن: $A=(200520052006)^2-(200520052005\times200520052007)=1$

3. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

تعريف:

ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n\in\mathbb{N}$.

- $a^1=a;a^0=1$
- $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{\text{مرةالعـــــدد}}$
- $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و لكل m و n من $\mathbb{N}$ لدينا:

- $a^n\times b^n=(ab)^n$
- $a^n\times a^m=a^{n+m}$
- $(a^n)^m=a^{nm}=(a^m)^n$
- $\dfrac{a^n}{b^n}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$
- $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}=\dfrac{1}{a^{m-n}}$

حالة خاصة:قوى العدد 10:

$10^0=1$ و $10^1=10$

$10^{-2}=0,01$

$10^{-1}=0,1$

$10^n=\underbrace{1000\cdots0}_{n};n\in\mathbb{N}$

$10^{-n}=\underbrace{0,000\cdots01}_{n};n\in\mathbb{N}$

4. الكتابة العلمية:

كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x=a\times10^p$ حيث p ينتمي الى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1\leq a\prec10$.
هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة: إذا كان x عددا سالبا فان كتابته العلمية هي $x=-a\times10^p$

مثال: المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم, تكتب $1,4959787\times10^8$ كلم.

5. الجذور المربعة:

تعريف:

ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد الحقيقي الموجب y .

بحيث $y^2=x$. و نكتب $\sqrt{x}=y$.

$\sqrt{x}=y$ يكافئ $x=y^2$ و $y\geq0$.

أمثلة: $\sqrt{9}=3;\sqrt{(-7)^2}=7;\sqrt{(ab)^2}=ab$ إذا كان $ab\succ0$

خاصية: لكل a و b من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$$\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n};n\in\mathbb{N}^* \quad \text{و} \quad \left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a \quad \text{و} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};b\succ0$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a};a\succ0 \quad \text{و} \quad \sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$$

إذا كان $x\geq0$ و $y\geq0$ فان : $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يكافئ $x=y$.

$\sqrt{x}=0$ أذا و فقط إذا كان $x=0$.

انتبه: $\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$ و $\sqrt{x^2+y^2}\neq x+y$

مثال مضاد: $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ و $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$ إذن $\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}$

6. التناسبية

تعريف : a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd\neq0$

نقول إن الأعداد a و b و c و d تكون في هذا الترتيب تناسبا إذا وفقط إذا كان : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

مثال : حدد العدد الحقيقي x إذا علمت أن الأعداد : $x+1$ و x و 3 و x و 2 تكون في هذا الترتيب تناسبا