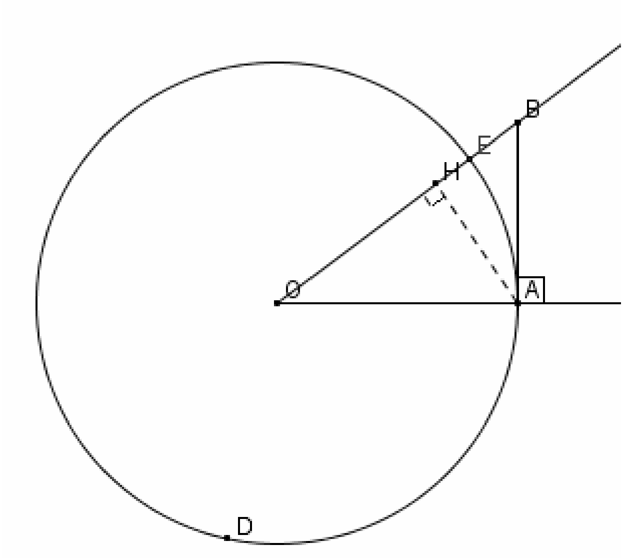
الحساب المثلثي – الجزء1

الدورة الأولى 15 ساعة	**القدرات المنتظرة** *- استعمال المحسبة العلمية لتحديد قيمة مقربة ازاوية محددة بأحد نسبها المثلثية والعكس. *- التمكن من النسب المثلثية للزوايا الاعتيادية وتطبيق مختلف العلاقات

I- تذكير و اضافات

1- أنشطة للتذكير

تمرين1



نعتبر الشكل التالي حيث $OA=4$ و $AB=3$ و H المسقط العمودي لـ A على (OB) :

1- أحسب OB

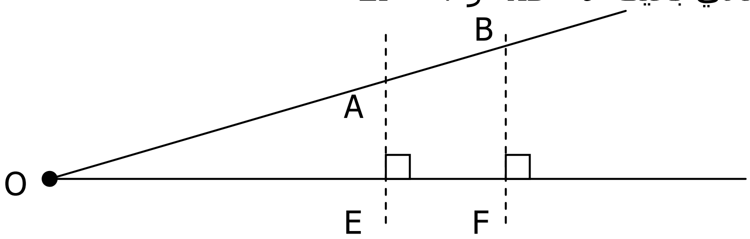
2- أ/ أحسب $\cos\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج قيمة مقربة لقياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

ب/ استنتج المسافة OH

3- أحسب $\tan\left(\widehat{AOB}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOB}\right)$

تمرين2

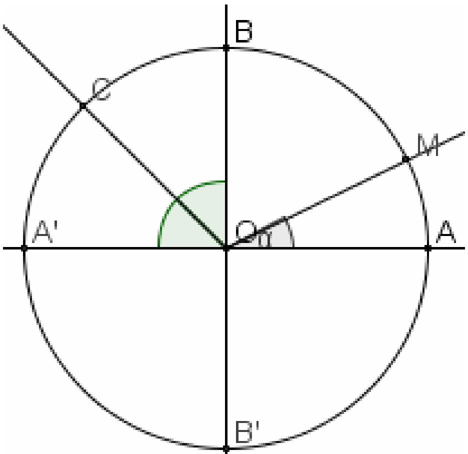
نعتبر الشكل التالي بحيث $AB=5$ و $EF=4$



أحسب $\cos\left(\widehat{AOE}\right)$ ثم استنتج $\sin\left(\widehat{AOE}\right)$

1- وحدات قياس الزوايا و الاقواس الهندسية – زاوية مركزية

1- أنشطة



لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R. نعتبر A و B و C و A' و B' و M نقط من (C) بحيث α قياس للزاوية الهندسية $\left[\widehat{AOM}\right]$ بالدرجة

1- اتمم الجدول التالي

الزاوية المركزية	$\left[\widehat{AOA'}\right]$	$\left[\widehat{AOB}\right]$	$\left[\widehat{AOC}\right]$	$\left[\widehat{AOB'}\right]$	$\left[\widehat{AOM}\right]$
قياس الزاوية المركزية بالدرجة					$\alpha°$
طول القوس الهندسية المرتبطة بها					l

2- بين أن $180°$ و $90°$ و $135°$ و $270°$ متناسبة مع πR و $\frac{\pi}{2}R$ و $\frac{3\pi}{4}R$ و $\frac{3\pi}{2}R$ على التوالي

3- حدد l بدلالة α و π و R

4- لتكن M' نقطة من (C) حيث طول القوس الهندسية $[AM']$ هو R.

حدد β قياس الزاوية المركزية $\left[\widehat{AOM'}\right]$ بالدرجة.

2- وحدات قياس الزوايا

لقياس الزوايا هناك ثلاث وحدات هي الدرجة و الغراد و الراديان.

أ/ تعريف الراديان

الراديان هو قياس زاوية مركزية، في دائرة شعاعها R ، تحصر قوسا دائرية طولها R .
نرمز لها بـ rd أو rad

ملاحظة $\pi rd = 200gr = 180^{\circ}$ (gr : يرمز للغراد)

ب/ نتيجة

إذا كان x قياس زاوية بالراديان و y قياسها بالدرجة و z قياسها بالغراد فان $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180} = \frac{z}{200}$

ج/ قياس قوس هندسية قياس قوس هندسية هو قياس الزاوية المركزية التي تحصره.

د/ طول قوس هندسية

إذا كان α قياس قوس هندسية بالراديان، في دائرة شعاعها R ، فان طول هذه القوس هو αR.

ملاحظة

طول قوس هندسية، في دائرة شعاعها 1 هو قياس الزاوية المركزية التي تحصرها.

تمارين تطبيقية

تمرين1

اتمم الجدول التالي

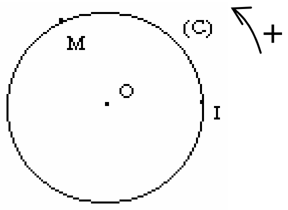
قياس زاوية بالدرجة	$90°$		$45°$	$30°$	$0°$
قياسها بالراديان		$\frac{\pi}{3}$			

تمرين2

ليكن ABC مثلثا متساوي الاضلاع حيث $AB = 5cm$ و نعتبر (C) الدائرة التي مركزه A و تمر من B. أحسب l طول القوس الهندسية المحصورة بالزاوية المركزية $\left[\widehat{BAC}\right]$

II- الدائرة المثلثية

1- توجيه دائرة - توجيه مستوى

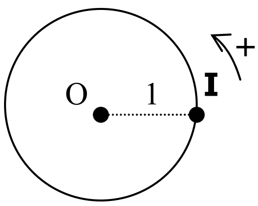


لتكن (C) دائرة مركزها O و شعاعها R و I نقطة من (C).
لو أردنا أن ننطلق من I لندور حول (C) ، لوجدنا أنفسنا أمام منحيين .
توجيه الدائرة (C) هو اختيار أحد المنحيين منحى موجبا (أو مباشرا)
و الآخر منحى سالبا (أو غير مباشر).
عادة نأخذ المنحى الموجب المعاكس لحركة عقارب الساعة .
النقطة I تسمى أصل الدائرة (C).

عندما توجه جميع دوائر المستوى توجيها موحدا فإننا نقول إن المستوى موجه.

2- الدائرة المثلثية

تعريف الدائرة المثلثية هي دائرة شعاعها1 مزودة بنقطة أصل و موجهة توجيها موجبا.



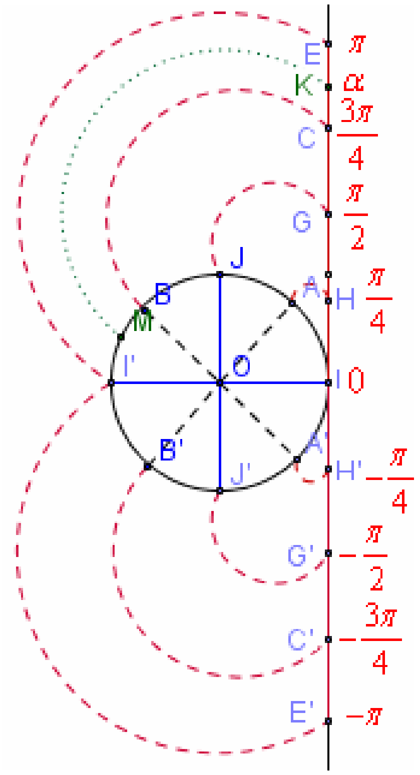
III– الأفاصيل المنحنية.

1- الأفصول المنحني الرئيسي لنقطة على الدائرة المثلثة

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المجال $]-\pi;\pi]$ حيث 0 أفصول I في المحور العمودي على (OI). حدد محيط الدائرة وشعاع الدائرة.

إذا لففنا القطعة الممثلة للمجال $]-\pi;\pi]$ على الدائرة (C) نلاحظ أن كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ ينطبق مع نقطة وحيدة M من (C) و كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M



خاصية و تعريف

لتكن (C) دائرة مثلثية أصلها I.

كل نقطة M من (C) تمثل عدد وحيد α من $]-\pi;\pi]$ و كل عدد α من $]-\pi;\pi]$ يمثل نقطة وحيدة M من (C).

العدد α يسمى الافصول المنحني الرئيسي لـ M

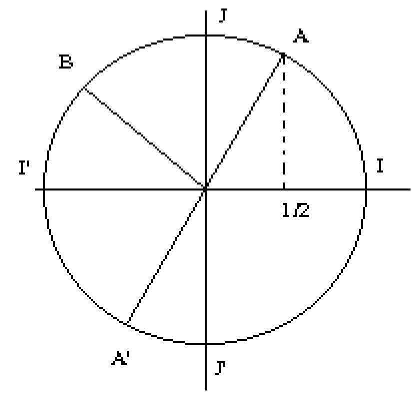
ملاحظة قياس الزاوية الهندسية $\left[\widehat{IOM}\right]$ هو $|\alpha|$ راديان

تمرين1

على دائرة مثلثية (C) أصلها I. أنشئ النقط A و B و C و D و E و F و G و H التي افاصيلها المنحنية الرئيسية هي $\frac{\pi}{6}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{3\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{3\pi}{4}$ على التوالي

تمرين2

(C) دائرة مثلثية أصلها I . حدد الأفاصيل المنحنية الرئيسية للنقط B; A';A; J'; J; I';I الممثلة في الشكل كما يلي

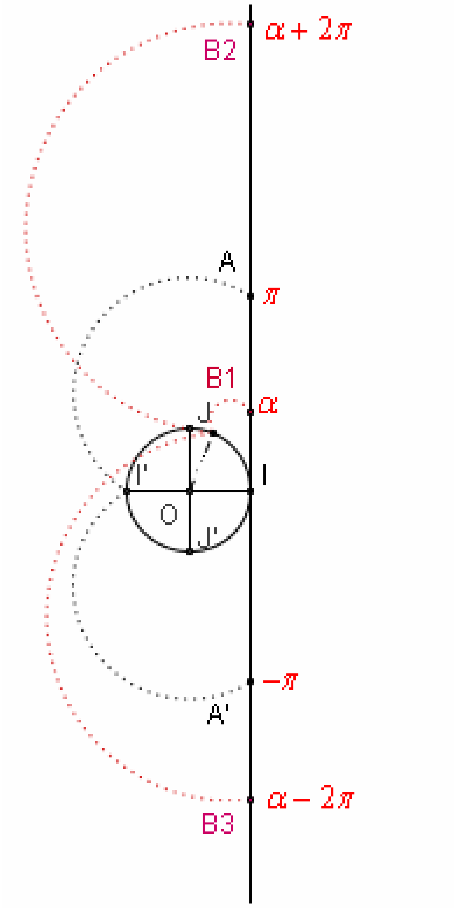


2- الأفاصيل المنحنية لنقطة على الدائرة المثلثة

نعتبر (C) دائرة مثلثية أصلها I. نعتبر المحور $(\Delta)=D(I,E)$ حيث $(OI)\perp(\Delta)$.

لتكن نقطة M من (C) أفصولها المنحني الرئيسي α.

لنحدد كل الأعداد التي تنطبق مع M اذا لففنا المستقيم العددي على (C)



نلاحظ اننا اذا لففنا المستقيم العددي الممثل لـ $\mathbb{R}$ على (C) النقطة M تنطبق مع الأعداد

.... $\alpha+4\pi$; $\alpha+2\pi$; α ; $\alpha-2\pi$; $\alpha-4\pi$ ....

كل هذه الأعداد تسمى الأفاصيل المنحنية لنقطة M

نلاحظ أن هذه الأعداد تكتب بشكل عام عل شكل $\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تعريف

لتكن M نقطة من دائرة مثلثية (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

كل عدد يكتب على الشكل $\alpha+2k\pi$ بحيث k عنصر من $\mathbb{Z}$ يسمى أفصولا منحنيا للنقطة M.

تمرين حدد الأفاصيل المنحنية للنقطتين A و B ذات الافصولين المنحنيين الرئيسيين $\frac{\pi}{5}$ و $-\frac{2\pi}{3}$ على التوالي

تمرين (C) دائرة مثلثة أصلها I .

نعتبر $\frac{34\pi}{3}$ أفصول منحنى لنقطة M . أنشئ M

ب- خاصيات

لتكن M نقطة من دائرة مثلثة (C) أصلها I. و ليكن α أفصولها المنحني الرئيسي

بين اذا كانx و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$

خاصية - إذا كان x و y أفصولين منحنيين للنقطة M فانه يوجد عنصر λ من $\mathbb{Z}$ بحيث $x-y=2\lambda\pi$ و نكتب $x \equiv y \quad [2\pi]$ و نقرأ x يساوي y بترديد 2π.

- إذا كان x أفصول منحنى للنقطة M فان جميع الأفاصيل المنحنية للنقطة M تكتب على شكل $x+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تمرين حدد الأفصول المنحني الرئيسي للنقطة التي إحدى أفاصيلها المنحنية $\alpha = \frac{-227\pi}{6}$

تمرين مثل على الدائرة المثلثة النقط $A;B;C$ التي أفاصيلها المنحنية على التوالي هي

$$7\pi \quad ; \quad \frac{37\pi}{3} \quad ; \quad \frac{-108\pi}{12}$$

تمرين أنشئ على الدائرة المثلثة النقط M_k التي أفاصيلها المنحنية $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

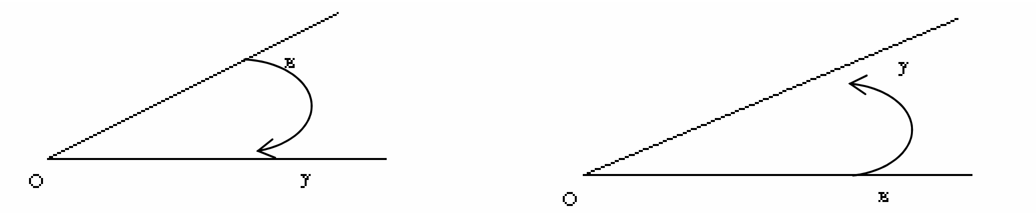
IV– الزوايا الموجهة

4- الزاوية الموجهة لنصفي مستقيم

أ- تعريف

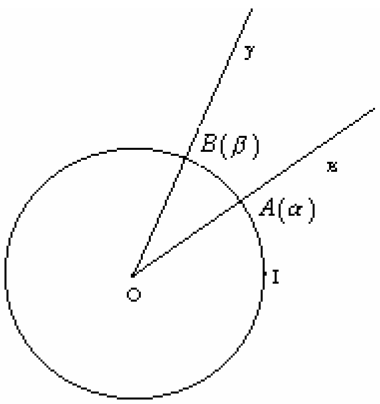
في المستوى الموجه نعتبر $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم لهما نفس الأصل

الزوج $([O;x[;[O;y[)$ يحدد زاوية موجهة لنصفي مستقيم و يرمز لها بالرمز $(\widehat{Ox;Oy})$



ب- قياسات زاوية موجهة لنصفي مستقيم

تعريف وخاصية



لتكن $(\widehat{Ox;Oy})$ زاوية موجهة لنصفي مستقيم ، و (C) دائرة مثلثة مركزها O ، A و B نقطتي تقاطع (C) و نصفي مستقيم $[O;x[$ و $[O;y[$ على التوالي

ليكن α و β أفصولين منحنيين للنقطتين A و B على التوالي .

العدد $\beta-\alpha$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

كل عدد حقيقي يكتب على الشكل $\beta-\alpha+2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ يسمى قياسا للزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$.

نرمز لقياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$ بالرمز $(\overline{Ox;Oy})$ نكتب $k \in \mathbb{Z}$ $\quad (\overline{Ox;Oy})=\beta-\alpha+2k\pi$

و نكتب أيضا $(\overline{Ox;Oy}) \equiv \beta-\alpha \quad [2\pi]$

خاصية و تعريف

لكل زاوية موجهة لنصفي مستقيم قياس وحيد ينتمي إلى المجال $]-\pi;\pi]$ يسمى القياس الرئيسي لهذه الزاوية الموجهة.

خاصية

إذا كان θ قياس للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\theta+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ قياس للزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$.

إذا كان α وβ قياسين للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ فان $\alpha-\beta\equiv 0 \quad 2\pi$

أي $\left(k\in\mathbb{Z}/ \quad \alpha-\beta=2k\pi\right)$

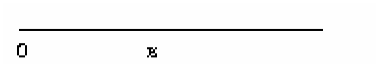
ملاحظات

* إذا كانت M نقطة من دائرة مثلثية أصلها I و مركزها O فان الأفاصيل المنحنية للنقطة M هي قياسات الزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$ و أن الافصول المنحني الرئيسي لـ M هو القياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{OI};\overline{OM}}\right)$

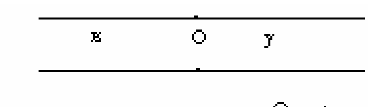
* القيمة المطلقة للقياس الرئيسي للزاوية الموجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ هي قياس الزاوية الهندسية $\left(\widehat{xOy}\right)$.

بعض الزوايا الخاصة

الزاوية المنعدمة $\left(\overline{Ox};\overline{Ox}\right)\equiv 0 \quad [2\pi]$

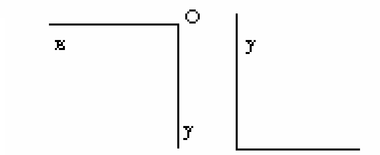


الزاوية المستقيمة $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$ $\quad \left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right)\equiv \pi \quad [2\pi]$



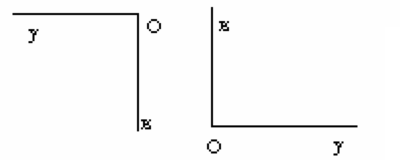
الزاوية القائمة - $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة موجبة



- $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

الزاوية $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ زاوية قائمة سالبة.



تمرين

1- بين أن القياسات التالية تمثل قياسات نفس الزاوية $\dfrac{601\pi}{6}$; $\dfrac{-143\pi}{6}$; $\dfrac{25\pi}{6}$

2- ما هو القياس الرئيسي لزاوية موجهة قياسها أحد القياسات 47π ; -36π ; $\dfrac{52\pi}{5}$; $-\dfrac{25\pi}{3}$

3- أنشئ زاوية موجهة $\left(\widehat{\overline{Ox};\overline{Oy}}\right)$ قياسها $\dfrac{-234\pi}{5}$.

تمرين أنشئ ABC مثلث متساوي الأضلاع حيث $[2\pi]$ $\left(\overline{AB};\overline{AC}\right)\equiv -\dfrac{\pi}{3}$

ج- علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم لها نفس الأصل فان

$$\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)+\left(\overline{Oy};\overline{Oz}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right) \quad [2\pi]$$

نتائج

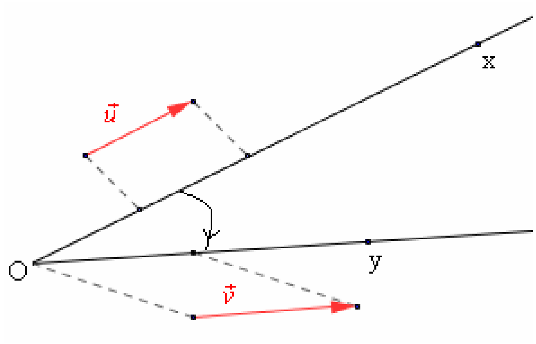
* اذا كان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم فان $[2\pi]$ $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv-\left(\overline{Oy};\overline{Ox}\right)$

* اذا كانت $[O;x[$ و $[O;y[$ و $[O;z[$ ثلاثة أنصاف مستقيم تحقق $[2\pi]$ $\left(\overline{Ox};\overline{Oy}\right)\equiv\left(\overline{Ox};\overline{Oz}\right)$ فان $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم منطبقان.

و هذا يعني أنه اذا كان $[Ox[$ نصف مستقيم و α عددا حقيقيا فانه يوجد نصف مستقيم وحيد $[O;y[$ بحيث $(\widehat{Ox;Oy}) \equiv \alpha \quad [2\pi]$.

د- زاوية زوج متجهتين غير منعدمتين

تعريف



لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى الموجه .و $[O;x[$ و $[O;y[$ نصفي مستقيم موجهين على التوالي بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$.

زاوية زوج المتجهتين $(\vec{u};\vec{v})$ هي الزاوية الموجهة $(\widehat{Ox;Oy})$

و يرمز لها بالرمز $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$.

ملاحظة

مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{\vec{u};\vec{v}})$ هي مجموعة قياسات الزاوية $(\widehat{Ox;Oy})$.

علاقة شال ونتائجها

علاقة شال

إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة فان

$$(\overline{\vec{u};\vec{v}}) + (\overline{\vec{v};\vec{w}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}}) \quad [2\pi]$$

نتائج

* اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين فان $[2\pi] \quad (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv -(\overline{\vec{u};\vec{v}})$

* اذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاثة متجهات غير منعدمة تحقق $[2\pi] \quad (\overline{\vec{u};\vec{v}}) \equiv (\overline{\vec{u};\vec{w}})$ فان $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستقيميتين ولهما نفس المنحى.

تمرين

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I. نعتبر على (C) النقط التالية المعرفة بأفاصيلها المنحنية

$$A(\pi) \qquad B\left(\frac{3\pi}{2}\right) \qquad E\left(\frac{23\pi}{4}\right) \qquad F\left(\frac{-17\pi}{3}\right)$$

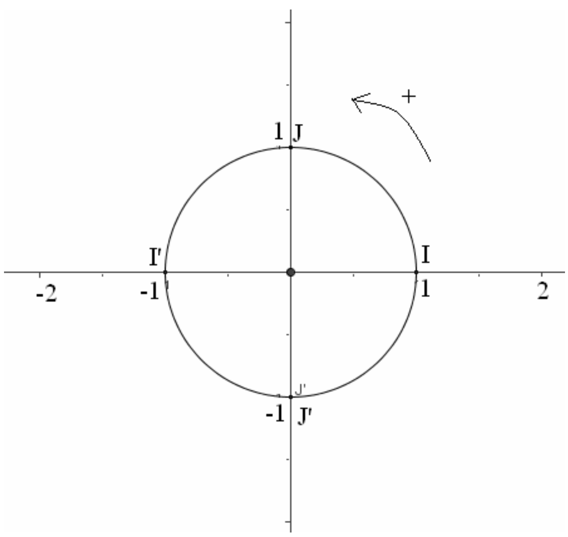
أعط قياسا لكل من الزوايا التالية ، ثم حدد القياس الرئيسي لكل منهن

$$(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OA}}) \; ; \; (\widehat{\overrightarrow{OB};\overrightarrow{OA}}) \; ; \; (\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OE}}) \; ; \; (\widehat{\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OF}})$$

V - النسب المثلثة

1- المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بالدائرة المثلثة

لتكن (C) دائرة مثلثية مركزها O و أصلها I .



ولتكن J من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ})$ زاوية قائمة موجهة

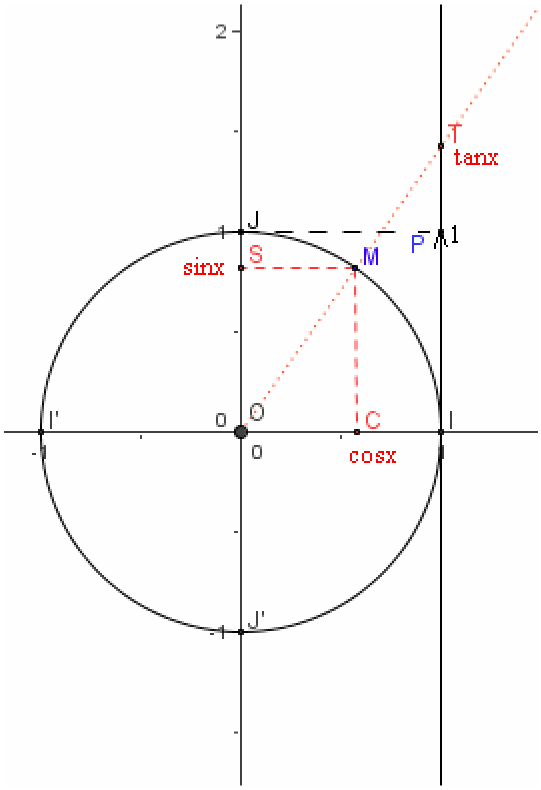
المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

لتكن J' من (C) بحيث $(\widehat{OI;OJ'})$ زاوية قائمة سالبة .

المعلم $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ'})$ يسمى المعلم المتعامد الممنظم الغير المباشر المرتبط بالدائرة المثلثة (C).

2- النسب المثلثة

1-2 تعاريف



لتكن (C) دائرة مثلثية و $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ المعلم المتعامد الممنظم المرتبط بها. لتكن M نقطة من (C) و x أفصولا منحنيا لها . نعتبر C المسقط العمودي لـ M على (OI) و S المسقط العمودي لـ M على (OJ)

*- العدد الحقيقي أفصول النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب تمام العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\cos x$

*- العدد الحقيقي أرتوب النقطة M في المعلم $\left(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ}\right)$ يسمى جيب العدد الحقيقي x . نرمز له بـ $\sin x$

*- ليكن Δ المماس لـ (C) عند I و النقطة $P(1;1)$.
لتكن T نقطة تقاطع (OM) و Δ أي

$x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$

العدد الحقيقي أفصول T في المعلم $(I;P)$ يسمى ظل العدد الحقيقي x نرمز له بـ $\tan x$.

ملاحظة و اصطلاحات

- إذا كان x أفصول منحنى لنقطة M فان $M(\cos x;\sin x)$

- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\cos x\end{array}$ تسمى دالة جيب التمام حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ cos
- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\sin x\end{array}$ تسمى دالة الجيب حيز تعريفها $\mathbb{R}$ يرمز لها بـ sin
- الدالة $\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ x\to\tan x\end{array}$ تسمى دالة الظل حيز تعريفها $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ يرمز لها بـ tan

2-2 خاصيات

*- كيفما كان وضع M نقطة من (C) أفصولها منحنى x النقطة C تنتمي الى القطعة $[II']$ و S تنتمي الى $[JJ']$ حيث $J(0;1)$; $J'(0;-1)$; $I'(-1;0)$; $I(1;0)$

لكل $x\in\mathbb{R}$ $-1\le\sin x\le 1$ $-1\le\cos x\le 1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}$ $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

*- لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

*- نعلم أن جميع الأعداد الحقيقية التي تكتب $x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ ، أفاصيل منحنية لنفس النقطة M

لكل $x\in\mathbb{R}$ $\sin(x+2k\pi)=\sin x$; $\cos(x+2k\pi)=\cos x$

- مهما كانت $M(x+k\pi)$ لدينا أفصول T هو $\tan x$

لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\tan(x+k\pi)=\tan x$

حالة خاصة لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ $\tan(x+\pi)=\tan x$

*- بتوظيف الدائرة المثلثية نحصل على

- $\sin(-x)=-\sin x \quad ; \quad \cos(-x)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

نعبرعن هذا بقولنا ان الدالة cos زوجية و أن الدالة sin فردية.

- $\tan(-x)=-\tan x$ لكل $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نعبر عن هذا بقولنا ان الدالة tan فردية.

- $\cos(\pi-x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi-x)=\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos(\pi+x)=-\cos x \quad ; \quad \sin(\pi+x)=-\sin x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ لكل $x\in\mathbb{R}$

3-2- نسب مثلثة اعتيادية

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tanx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

تمارين

تمرين1 أحسب $\sin\frac{-7\pi}{2} \; ; \sin\frac{53\pi}{6} \; ; \cos\frac{-37\pi}{4} \; ; \cos\frac{34\pi}{3}$

تمرين2 أ- حدد $1+\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+....+\cos\frac{11\pi}{6}$

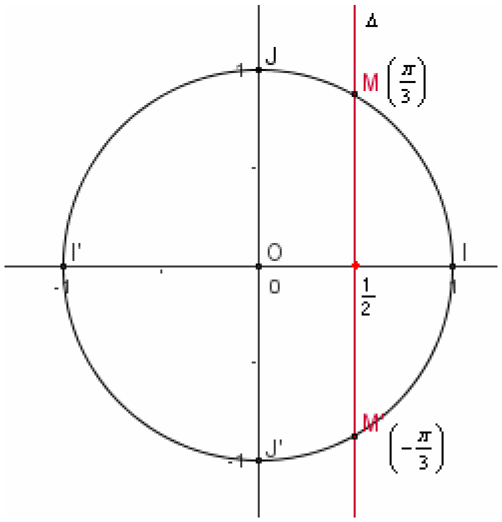
ب- بسط $\sin\left(\frac{7\pi}{2}+x\right)+\cos\left(\frac{27\pi}{2}-x\right)+\sin(3\pi+x)-\cos(7\pi-x)$

الحساب المثلثي – الجزء 2-

القدرات المنتظرة	الدرس الأول	الدورة الثانية
التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية	عدد الساعات: 15	

I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x = a$



مثال1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta :\ x = \frac{1}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M

و $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ بحيث $k\in\mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M'

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in [-2\pi;2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi;2\pi]$

فان $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ أو $-2\pi \le -\frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$

لدينا $-2\pi \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \le k \le \frac{5}{6}$ تكافئ $k=-1$ أو $k=0$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \le -\frac{\pi}{3}+2k\pi \le 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \le k \le \frac{7}{6}$ تكافئ $k=1$ أو $k=0$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

خلاصة
* المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \ \vee\ a \prec -1$
* $\cos x = 1$ $\ x\in\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = 2k\pi$ $\ / k\in\mathbb{Z}$
* $\cos x = -1$ $\ x\in\mathbb{R}$ إذا وفقط إذا كان $x = \pi+2k\pi$ $\ / k\in\mathbb{Z}$
* إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $]0;\pi[$ حيث $\cos\alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x = \alpha+2k\pi$ أو $x = -\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

$S = \{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات

$\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x\in]-\pi;3\pi]$ $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ $x\in\mathbb{R}$

$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$ $x\in[\pi;2\pi[$

الحل

* نحل $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ $x\in\mathbb{R}$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$ تكافئ $2x=x+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $2x=-x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $3x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

* نحل $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x\in]-\pi;3\pi]$

نعلم أن $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ومنه $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

و بالتالي $\cos\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $2x-\frac{3\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{3\pi}{4}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $2x=\frac{19\pi}{12}+2k\pi$ أو $2x=-\frac{\pi}{12}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

و حيث $x\in]-\pi;3\pi]$ فان

من أجل $x=\frac{19\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec\frac{19\pi}{24}+k\pi\leq 3\pi$ أي $-1\prec\frac{19}{24}+k\leq 3$

ومنه $-\frac{43}{24}\prec k\leq\frac{53}{24}$

و حيث $k\in\mathbb{Z}$ فان $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$

إذن $x=\frac{19\pi}{24}-\pi=-\frac{5\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+\pi=\frac{43\pi}{24}$ أو $x=\frac{19\pi}{24}+2\pi=\frac{67\pi}{24}$

من أجل $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$ لدينا $-\pi\prec-\frac{\pi}{24}+k\pi\leq 3\pi$ أي $-1\prec-\frac{1}{24}+k\leq 3$

ومنه $-\frac{23}{24}\prec k\leq\frac{73}{24}$

و حيث $k\in\mathbb{Z}$ فان $k=0$ أو $k=1$ أو $K=2$ أو $k=3$

إذن $x=-\frac{\pi}{24}+0\cdot\pi=-\frac{\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+\pi=\frac{23\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+2\pi=\frac{47\pi}{24}$ أو $x=-\frac{\pi}{24}+3\pi=\frac{71\pi}{24}$

إذن $S=\left\{-\frac{5\pi}{24};-\frac{\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{23\pi}{24};\frac{43\pi}{24};\frac{47\pi}{24};\frac{67\pi}{24};\frac{71\pi}{24}\right\}$

* نحل $2\cos^2 x+3\cos x+1=0$ $x\in[\pi;2\pi[$

نضع $\cos x=X$ المعادلة تصبح $2X^2+3X+1=0$

ليكن Δ مميز المعادلة

$$\Delta = 3^2 - 4\times 2\times 1 = 1$$

ومنه $X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$ أو $X = \frac{-3-1}{4} = -1$

و بالتالي $\cos x = -\frac{1}{2}$ أو $\cos x = -1$

لدينا $\cos x = -1$ تكافئ $x = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} /$

و حيث $x \in [\pi; 2\pi[$ فان $\pi \le \pi + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $0 \le k \prec \frac{1}{2}$ ومنه $k = 0$ إذن $x = \pi$

لدينا $\cos x = -\frac{1}{2}$ أي $\cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

ومنه $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث $x \in [\pi; 2\pi[$ فان

من أجل $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{5}{6} \le k \prec \frac{4}{3}$ ومنه $k = 1$

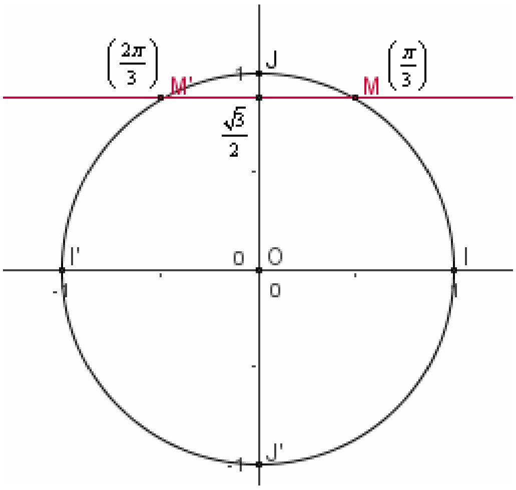
إذن $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$

من أجل $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ لدينا $\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec 2\pi$ أي $\frac{1}{6} \le k \prec \frac{2}{3}$ لا يوجد عدد صحيح نسبي يحقق المتفاوتة الأخيرة

إذن $S = \left\{\pi; \frac{4\pi}{3}\right\}$

2- **المعادلة** $\sin x = a$

مثال1 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$



لدينا المستقيم $\Delta: \ y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصيل المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

إذن $S = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

مثال 2 حل $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x \in [-2\pi; 3\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 3\pi]$

فان $-2\pi \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi \leq 3\pi$ أو $-2\pi \leq \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq 3\pi$

لدينا $-2\pi \leq \frac{\pi}{3}+2k\pi \leq 3\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{8}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{7\pi}{3}$ أو $x=\frac{\pi}{3}$ أو $x=-\frac{5\pi}{3}$

لدينا لدينا $-2\pi \leq \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq 3\pi$ تكافئ $-\frac{8}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$

تكافئ $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

ومنه $x=\frac{8\pi}{3}$ أو $x=\frac{2\pi}{3}$ أو $x=-\frac{4\pi}{3}$

إذن $S=\left\{\frac{-5\pi}{3};\frac{-4\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3};\frac{8\pi}{3}\right\}$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a \succ 1 \quad \vee \quad a \prec -1$

$\sin x = 1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} /$

$\sin x = -1 \quad x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}+2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} /$

إذا كان $-1 \prec a \prec 1$ فان يوجد عنصر α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $\sin\alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في $\mathbb{R}$ هي $x=\alpha+2k\pi$ أو $x=\pi-\alpha+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

مجموعة حلول المعادلة $S=\{\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

تمرين حل المعادلات $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in\left]-\pi;2\pi\right]$

الحل---

نحل $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x) \qquad x\in\mathbb{R}$

$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos(3x)$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

تكافئ $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ أو $2x+\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{2}+3x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $5x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $x=\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi$ أو $x=-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

إذن $S=\left\{\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+2(-k)\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

نحل $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad x\in\left]-\pi;2\pi\right]$

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

تكافئ $2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ أو $2x-\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$

تكافئ $2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ أو $2x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

تكافئ $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$ أو $x = \frac{17\pi}{24} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

و حيث أن $x \in]-\pi;2\pi]$ فان

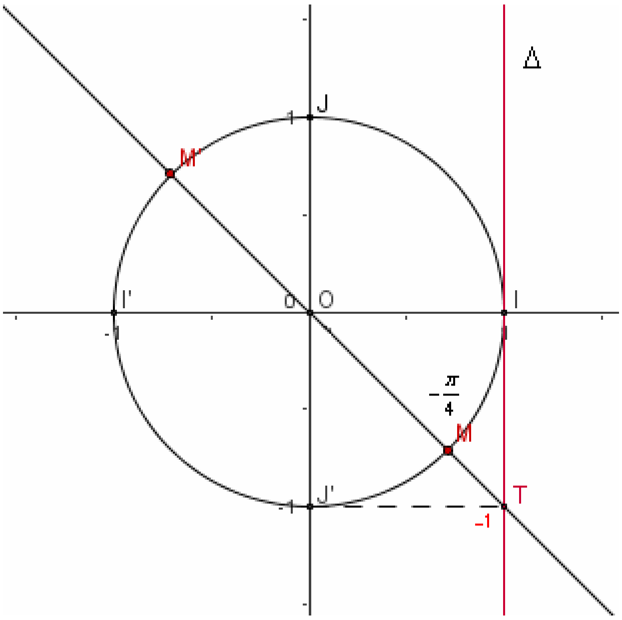
من أجل $x = \frac{\pi}{24} + k\pi$ لدينا $-\pi \prec \frac{\pi}{24} + k\pi \le 2\pi$ أي $-\frac{25}{24} \prec k \le \frac{47}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x = \frac{\pi}{24} - \pi = -\frac{23\pi}{24}$ أو $x = \frac{\pi}{24}$ أو $x = \frac{\pi}{24} + \pi = \frac{25\pi}{24}$

من أجل لدينا $-\pi \prec \frac{17\pi}{24} + k\pi \le 2\pi$ ومنه $-\frac{41}{24} \prec k \le \frac{31}{24}$ و منه $k=-1$ أو $k=0$ أو $k=1$

إذن $x = \frac{17\pi}{24} - \pi = -\frac{7\pi}{24}$ أو $x = \frac{17\pi}{24}$ أو $x = \frac{17\pi}{24} + \pi = \frac{41\pi}{24}$

ومنه $S = \left\{ -\frac{23\pi}{24}; -\frac{7\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{41\pi}{24} \right\}$



3- المعادلة $\tan x = a$

حل المعادلة $\tan x = -1$ $x \in \mathbb{R}$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ،

نأخذ النقطة T من Δ حيث -1 أفصول T في المحور Δ

المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C)

في النقطتين M و M' نعلم أن $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحنى للنقطة M

وبما أن $\tan(x+k\pi) = \tan x$ لكل $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

فان حلول المعادلة هي $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

اذن $S = \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

خاصية

$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$ حيث α حل للمعادلة $\tan x = a$ في $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

تمرين حل المعادلتين

$\tan 2x = \sqrt{3}$ $\quad x \in [0;3\pi]$

$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

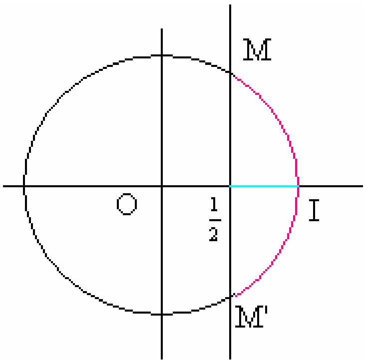
II- المتراجحات المثلثة

مثال1

حل $\cos x \ge \frac{1}{2}$ $\quad x \in]-\pi;\pi]$

نحل أولا المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in]-\pi;\pi]$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على



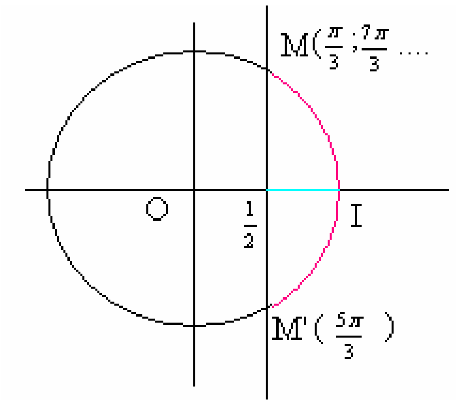
$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{\pi}{3}$

لتكن $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ و $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل

المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $\left]-\pi;\pi\right]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$



مثال 2 حل $\cos x \geq \frac{1}{2}$ $\quad x \in \left[0;3\pi\right[$

نحل أولا المعادلة $\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \left[0;3\pi\right[$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\quad x \in \left[0;3\pi\right[$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{7\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

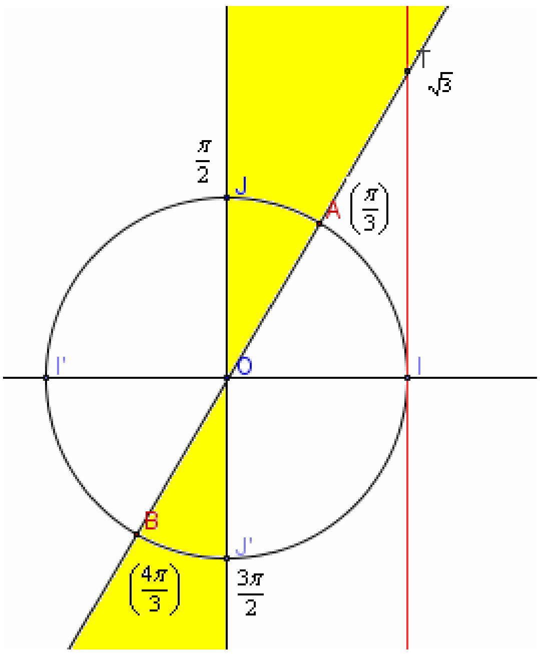
$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية للنقط (C)

التي تنتمي الى القوس $\left[\widehat{M'IM}\right]$ في $\left[0;3\pi\right[$

وهذه المجموعة هي $S = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right]$



مثال3

حل $\tan x \geq \sqrt{3}$ $\quad x \in \left[0;2\pi\right]$

نحل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$ $\quad x \in \left[0;2\pi\right]$

$\tan x = \sqrt{3}$ $\quad x \in \left[0;2\pi\right]$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{4\pi}{3}$

نعتبر $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة A

و $\frac{4\pi}{3}$ أفصول منحنى للنقطة B

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصيل المنحنية

للنقط (C) التي تنتمي إلى اتحاد القوسين $\left[\widehat{AJ}\right[$ و $\left[\widehat{BJ'}\right[$

في $\left[0;2\pi\right]$

وهذه المجموعة هي $S = \left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[$

تمرين

حل $\quad \sin x \succ \frac{-1}{2}$ $\quad x \in \left]-\pi;\pi\right]$

$\sin x \succ \frac{-1}{2}$ $\quad x \in \left]0;4\pi\right]$

$\tan x \prec 1$ $\quad x \in \left[0;2\pi\right]$

متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات أساسية

تمرين

حل

$$x \in [-\pi;\pi] \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$x \in [0;\pi] \quad \tan 3x \succ \sqrt{3}$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad 4\cos^2 x - 2\left(1+\sqrt{2}\right)\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

$$x \in]-\pi;\pi] \quad \frac{1+\tan x}{\sin 2x} \geq 0$$

III- الزوايا المحيطية – الرباعيات الدائرية

1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

2-خاصيات

نشاط1

لتكن (C) دائرة مركزها O نعتبر A و B نقطتين مختلفتين من (C) غير متقابلتين قطريا و M نقطة من (C) بحيث $\widehat{AOB}$ و $\widehat{AMB}$ تحصران نفس القوس $\left[\widehat{AB}\right]$

1- بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ في الحالات التالية

أ/ M و O و A مستقيمية

ب/ M و O و A غير مستقيمية

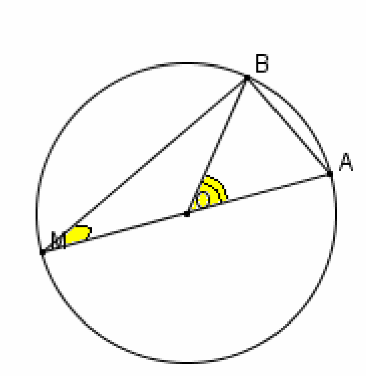
يمكن اعتبار نقطة N من (C) حيث N و O و M مستقيمية

و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر (AT) المماس للدائرة (C). الزاوية $\widehat{BAT}$ محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الالزاوية المركزية $\widehat{AOB}$

بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

الحل---------------------------



1- أ/ M و O و A مستقيمية

المثلث OBM متساوي الساقين في الرأس O

ومنه $\widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$

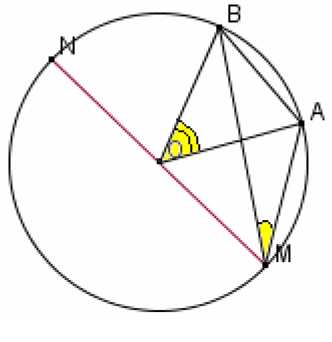
و حيث $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$ لأن M و O و A مستقيمية

فان $\widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$

اذن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$

ب/ M و O و A غير مستقيمية

N من (C) حيث N و O و M مستقيمية



حسب أ/ لدينا $\widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$

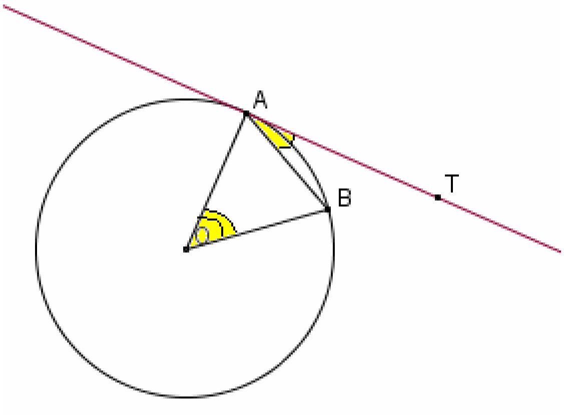
لدينا OAM مثلث متساوي الساقين في الرأس O

و منه $\widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$

لدينا $\widehat{AOB} = \pi - \left(\widehat{NOB} + \widehat{AOM}\right)$

ومنه $\widehat{AOB} = \pi - \left(2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO}\right)$

$$\widehat{AOB} = 2\left(\widehat{AMO} - \widehat{NMB}\right)$$



إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{AMB}$

/2 بين أن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

(AT) المماس للدائرة (C) ومنه $\widehat{OAB}=\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}$

لدينا OAB متساوي الساقين في الرأس O

ومنه $\widehat{AOB}=\pi-2\widehat{OAB}$

و بالتالي $\widehat{AOB}=\pi-2\left(\frac{\pi}{2}-\widehat{BAT}\right)$

إذن $\widehat{AOB}=2\widehat{TAB}$

خاصية1

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

نشاط2

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة من دائرة (C) مركزها O

بين أن $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

خاصية2

A و B و C ثلاث نقط من دائرة (C) و D نقط مختلفة من المستوى تكون D من الدائرة (C) إذا و فقط إذا كان $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=\pi$ أو $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$

3- علاقات الجيب في مثلث

نشاط 3

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

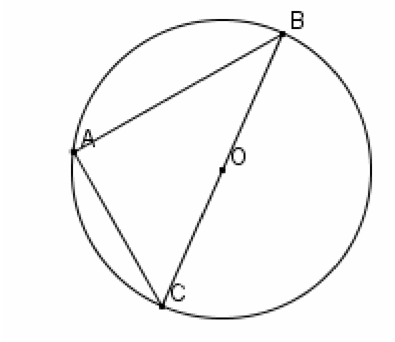
بين أن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$ في الحالات التالية

أ/ ABC قائم الزاوية في A

ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

الجواب



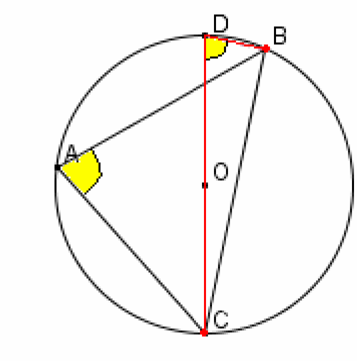
أ/ ABC قائم الزاوية في A

$\sin\widehat{A}=\sin\frac{\pi}{2}=1$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=BC=2R$

$\sin\widehat{B}=\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{2R}$ ومنه $\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=2R$

$\sin\widehat{C}=\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{2R}$ ومنه $\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$

إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=\frac{AC}{\sin\widehat{B}}=\frac{AB}{\sin\widehat{C}}=2R$



ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

DBC قائم الزاوية في B

لدينا $\widehat{A}\equiv\widehat{D}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin\widehat{D}=\frac{BC}{DC}=\frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin\widehat{D}}=2R$ إذن $\frac{BC}{\sin\widehat{A}}=2R$

لدينا DAC قائم الزاوية في A

و $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$\sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$ ومنه $\sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R}$ إذن $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

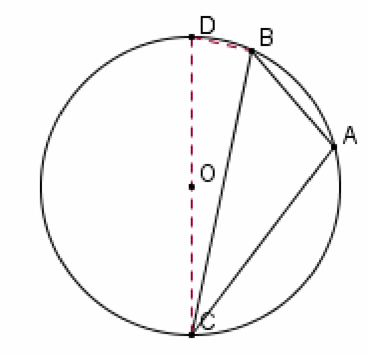
بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع A و نبين $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

لنفترض أن $\widehat{A}$ منفرجة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C



$\widehat{A}$ و $\widehat{D}$ متكاملتان ومنه $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$\sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$ ومنه $\frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R$ إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R$

الزاويتان $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ حادتان

حسب ب/ نحصل على $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$ و $\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$

إذن $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

خاصية

> ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة به
>
> $$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)

نشاط

ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي لـ A على (BC) و S مساحته

1- بين أن $S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$

2- ليكن r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و O مركزها

أ/ أحسب مساحة AOC بدلالة r و AC

ب/ بين أن $S = \frac{1}{2} p \times r$ حيث p محيط المثلث ABC

خاصية

> ليكن ABC مثلثا و r شعاع الدائرة المحاطة به و S مساحته p محيطه
>
> $$S = \frac{1}{2}\left(BC \times AC \times \sin \widehat{C}\right)$$
>
> $$S = \frac{1}{2} p \times r$$