مبادئ في الحسابيات
Notions d'arithmétique

أهداف الدرس

- التعرف على المجموعة $\mathbb{N}$.
- تحديد قواسم عدد صحيح طبيعي.
- التمييز بين الأعداد الزوجية و الفردية.
- التعرف على مصاديق قابلية القسمة على كل من الأعداد:2-3-4-5-و9.
- التعرف على عدد أولي.
- استعمال تقنيات تفكيك عدد صحيح طبيعي إلى جداء عوامل أولية.
- توظيف التفكيك الأولي في تحديد القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.
- توظيف خوارزمية إقليدس في تحديد القاسم المشترك الأكبر.

القدرات المنتظرة

- توظيف الزوجية و تفكيك عدد إلى جداء عوامل أولية في حل بعض المسائل البسيطة حول الأعداد الصحيحة الطبيعية.

فقرات الدرس

- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية.
- الأعداد الزوجية و الأعداد الفردية
- القاسم المشترك الأكبر
- المضاعف المشترك الأصغر.

مبادئ في الحسابيات
Notions d'arithmétique

I)- مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

1)-ترميز

الأعداد مثل: $0-1-2-3-4$... تسمى أعدادا صحيحة طبيعية.
جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية ، و يرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و تكتب بالتفصيل كما يلي : $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,4,....\}$.

ملاحظة

المجموعة $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4,5,...\}$ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الغير منعدمة .

2)- قواسم عدد – مضاعفات عدد : Les diviseurs d'un nombre – Les multiples d'un nombre

تعريف

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.
إذا وجد عدد صحيح طبيعي q من $\mathbb{N}$ بحيث $a=bq$ نقول إن:
- b قاسم ل a أو أيضا b يقسم a.
- a مضاعف ل b أو أيضا a يقبل القسمة على b و نكتب: $b \backslash a$

ملاحظة

- العدد 0 مضاعف لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية.
- العدد 1 قاسم لجميع الأعداد الصحيحة الطبيعية .

3)- الأعداد الزوجية – الأعداد الفردية : Les nombres pairs – Les nombre impairs

نشاط01

- أنجز قسمة كل من العددين 2007 و 2008 على 2. ماذا تستنتج؟.

تعريف

- كل عدد صحيح طبيعي a قابل للقسمة على 2 يكتب على الشكل $a=2n$ حيث $(n\in\mathbb{N})$ يسمى عددا زوجيا.
- كل عدد صحيح طبيعي a لا يقبل القسمة على 2 يكتب على الشكل $a=2n+1$ حيث $(n\in\mathbb{N})$ يسمى عددا فرديا.

مثال

- حدد زوجية كل من العددين 2007 و 2008.

تمرين

- بين أن n^2+n عدد زوجي ، لكل n من $\mathbb{N}$.

ملاحظة

- مجموع عددين لهما نفس الزوجية هو عدد زوجي.
- مجموع عددين مختلفي الزوجية هو عدد فردي.
- جداء عددين مختلفي الزوجية هو عدد زوجي.

4)- مصاديق قابلية القسمة على الأعداد: 2-3-4-5-9

خاصية

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا .
- إذا كان رقم وحداته : 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8 فهو قابل للقسمة على 2 .
- إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 3 فهو مضاعف ل 3 .
- إذا كان رقمي و حداته و عشراته يكونان في هذا الترتيب عددا مضاعفا ل 4 فهو مضاعف ل 4 .
- إذا كان رقم وحداته 0 أو 5 فهو قابل للقسمة على 5.
- إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا للعدد 9 فهو مضاعف ل 9 .

مثال

- باستعمال المصاديق السابقة ، ادرس قابلية قسمة العدد 27516 على كل من الأعداد: $2,3,4,5,9$.

5)- الأعداد الأولية Les nombres premiers

نشاط02

- حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية الأصغر من 100والتي لها قاسمين فقط .

تعريف

كل عدد صحيح طبيعي a يقبل قاسمين مختلفين فقط هما: 1 و a يسمى عددا أوليا.

خاصية

كل عدد صحيح طبيعي لا يقبل القسمة على جميع الأعداد الأولية التي مربعاتها أصغر منه هو عدد أولي.

مثال

- بين أن العدد 487 هو عدد أولي .

ملاحظة

❖ العدد 1 ليس عددا أوليا.

6)- التفكيك إلى جداء عوامل أولية

نشاط03

- أكتب العدد 120 على شكل جداء عوامله قوى لأعداد أولية.

خاصية

كل عدد صحيح طبيعي غير منعدم و يخالف 1 يكتب على شكل جداء عوامل أولية .

تمرين

1) - فكك إلى جداء عوامل أولية العددين 3240 و 1440.
2) - بسط $\sqrt{3240}$ و $\sqrt{1440}$ ثم استنتج أن $\sqrt{3240\times1440}\in\mathbb{N}$.

تمرين

1) - بين أن $m-n$ و $m+n$ لهما نفس الزوجية، لكل m و n من $\mathbb{N}$.
2) - ليكن n عددا صحيحا طبيعيا فرديا و يخالف1.
   أ- بين أن 8 يقسم العدد n^2-1 .
   ب- استنتج أن 16 يقسم n^4-1.
   ج- استنتج أن: 8 يقسم n^2+4n+3.

II)- القاسم المشترك الأكبر : Le plus grand commun diviseur

1)- القاسم المشترك الأكبر

نشاط04

1) - حدد D_{48} و D_{28} ، مجموعتي قواسم العددين 48 و 28 على التوالي.
2) – حدد تقاطع المجموعتين D_{48} و D_{28} ، ثم استنتج أكبر قاسم مشترك للعددين 48 و 28.

تعريف

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين غير المنعدمين .
أكبر قاسم مشترك للعددين a و b يسمى القاسم المشترك الأكبر ل a و b و يرمز له بالرمز $PGCD(a,b)$.

مثال:

- تحقق من أن $PGCD(24,35)=1$.

تعريف

نقول إن العددين a و b أوليان فيما بينهما ، إذا كان قاسمهما المشترك الأكبر هو 1.

2)- تقنيات تحديد القاسم المشترك الأكبر

خاصية1

ليكن a وb عددين صحيحين طبيعيين غير المنعدمين.
القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b هو جداء العوامل الأولية المشتركة في تفكيكهما إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أصغر أس.

مثال

- فكك إلى جداء عوامل أولية العددين 128 و 78 ثم استنتج $PGCD(128,78)$

خاصية:خوارزمية إقليدس أو طريقة القسمات المتتالية

ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين الغير منعدمين بحيث $b \prec a$.
ليكن r_1 باقي القسمة الأقليدية ل a على b.وليكن r_2 باقي قسمة b على r_1.نعيد هذه العملية حتى نحصل على باقي منعدم .آخر باقي غير المنعدم لهذه القسمات المتتالية هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

مثال

باستعمال طريقة القسمات المتتالية حدد $PGCD(128,78)$.

تمرين

1)- حدد جميع قواسم العدد 26 .
2)- استنتج جميع الأعداد x و y من $\mathbb{N}$ التي تحقق: $(x+1)(y+2)=26$.
3)- حدد جميع الأعداد x و y من $\mathbb{N}$ التي تحقق: $xy+x+y=22$.

III)- المضاعف المشترك الأصغر: Le plus petit commun multiple

نشاط05

3) - حدد M_8 و M_6 ، مجموعتي مضاعفات العددين 8 و 6 على التوالي.
4) – حدد تقاطع المجموعتين M_8 و M_6 ، ثم استنتج أصغر مضاعف مشترك غير منعدم للعددين 8 و 6.

تعريف

ليكن a و b عنصرين من $\mathbb{N}$.
أصغر مضاعف مشترك غير المنعدم للعددين a و b يسمى المضاعف المشترك الأصغر ل a و b ويرمز له بالرمز $PPCM(a,b)$

مثال

- حدد $PPCM(6,14)$

خاصية

ليكن a وb عددين صحيحين طبيعيين غير المنعدمين.
المضاعف المشترك الأصغر للعددين a وb هو جداء العوامل المشتركة والغير مشتركة في تفكيكهما إلى جداء عوامل أولية مرفوعة إلى أكبر أس.

مثال

- فكك إلى جداء عوامل أولية العددين 128 و 78 ، ثم استنتج $PPCM(128,78)$

ملاحظة

❖ إذا كان a و b عددين صحيحين طبيعيين بحيث a يقسم b فإن:
$PPCM(a,b)=b$ و $PGDC(a,b)=a$.