الهندسة الفضائية

القدرات المنتظرة

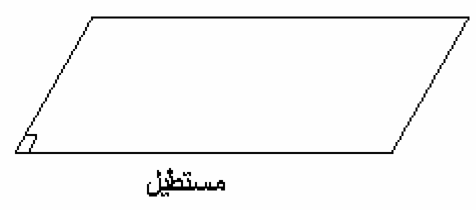
*- تعرف وتمثيل أجزاء في الفضاء على المستوى.
*- إدراك حالات المماثلة وحالات اللاامماثلة بين مفاهيم وخاصيات في المستوى ونظيراتها في الفضاء.
*- توظيف خاصيات الهندسة الفضائية في حل مسائل مستقاة من الواقع.

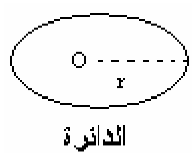
التوازي في الفضاء

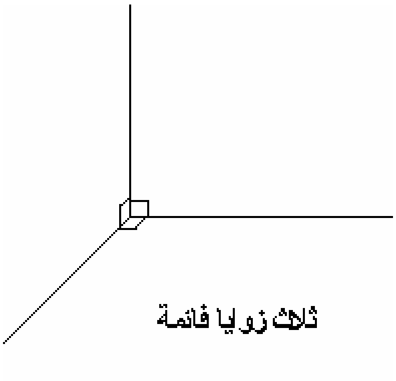
I- تذكير

1- التمثل المستوى للأشكال في الفضاء

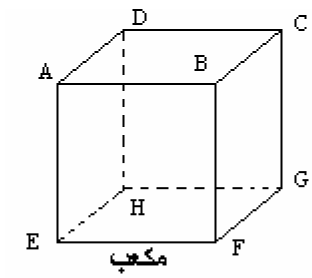
* الرسومات في الفضاء لا تحترم طبيعة الأشكال

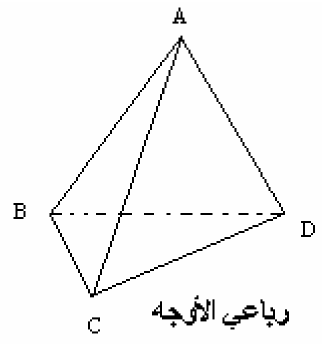






* لرسم أشكال في الفضاء نتبع التقنية التالية
- الخطوط المرئية في الواقع نرسمها بخطوط متصلة
- الخطوط الغير المرئية في الواقع نمثلها بخطوط متقطعة
- المستقيمات المتوازية في الواقع نمثلها بمستقيمات متوازي في الرسم
- النقط المستقيمية تمثل بنقط مستقيمية في الرسم.
- قطعتان متقايستان حاملاهما متوازيان نمثلهما بقطعتين متقايستين حامليهما متوازيين





2- موضوعات و تعاريف

الفضاء مجموعة عناصرها تسمى نقط نرمز لها بالرمز(E)
المستقيمات و المستويات أجزاء فعلية من الفضاء

أ- موضوعة1

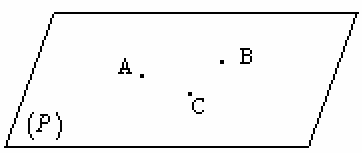
كل نقطتين مختلقتين A و B في الفضاء تحدد مستقيما وحيد نرمز له بـ (AB)

تعريف

نقول عن عدة نقط أنها مستقيمية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستقيم

ب- موضوعة2

كل ثلاث نقط غير مستقيمية A و B و C في الفضاء تحدد مستوى وحيد نرمز له بـ(ABC) أو (P)

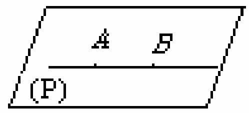


تعريف

* نقول عن عدة نقط أنها مستوائية في الفضاء إذا كانت تنتمي إلى نفس المستوى. * نقول عن مستقيمين (أو مستقيمات) أنهما مستوئيين(أو مستوائية) إذا كانا (أو كانوا) ضمن نفس المستوى.

ج- موضوعة3

إذا انتمت نقطتان مختلفتان من مستقيم (D) إلى مستوى (P) فان (D) ضمن (P).

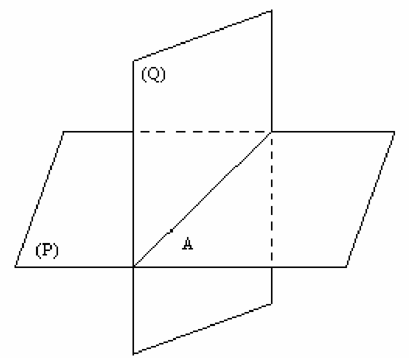


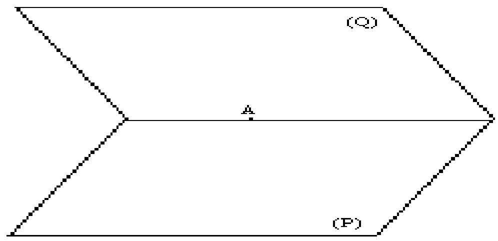
ملاحظة هامة

جميع خاصيات الهندسة المستوية تبقى صالحة في كل مستوى من مستويات الفضاء و كل مستقيم من مستقيماته.

د- موضوعة4

إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فانهما يتقاطعان وفق مستقيم يمر من هذه النقطة.





ذ- نتائج

نتيجة1

كل مستقيم ونقطة خارجه يحددان مستوى وحيدا في الفضاء

نتيجة2

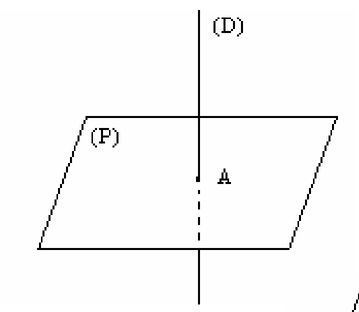
كل مستقيمين متقاطعين في الفضاء يحددان مستوى وحيد في الفضاء

3- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوى

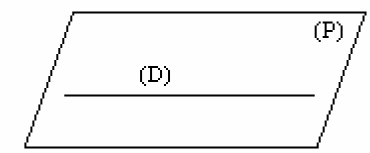
ليكن (D) مستقيم و (P) مستوى من الفضاء

لدينا ثلاث وضعيات ممكنة

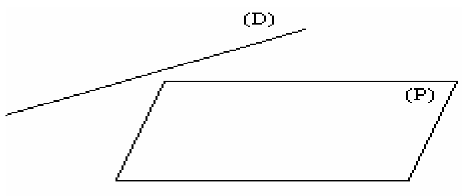
الوضعية1: (D) يخترق (P)



الوضعية2: $(D)\subset(P)$

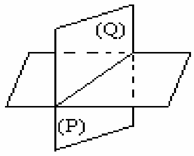


الوضعية3: (D) و(P) منفصلان (أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)

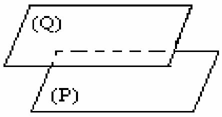


4- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن (P) و (Q) مستويين في الفضاء. لدينا ثلاث حالات



* (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم

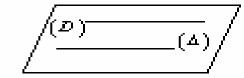


* (P) و (Q) منفصلان
(أي ليست لهما أية نقطة مشتركة)

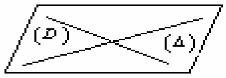
* (P) و (Q) منطبقان

5- الأوضاع النسبية لمستقيمين مختلفين

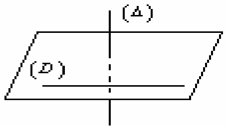
ليكن (D) و (Δ) مستقيمين مختلفين. هناك ثلاث حالات



* (D) و (Δ) مستوئيان ومنفصلان



* (D) و (Δ) مستوئيان ومتقاطعان



* (D) و (Δ) غير مستوئيين

تمرين

ليكن $EFGH$ رباعي الأوجه النقطة I من $[FG]$ مخالفة عن F و G و النقطة J من $[EG]$ مخالفة عن E و G و النقطة K من $[EH]$ مخالفة عن E و H

هل (EI) و (JK) متقاطعان

تمرين

$ABCDEFGH$ مكعب

حدد تقاطع (ACG) و (BDG)

للبرهنة على استقامية نقط في الفضاء ، نبحث غالبا على مستويين متقاطعين و نبين أن هذه النقط مشتركة

تمرين $ABCD$ رباعي الأوجه و P و Q و R نقط من $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ حيث (PR) يقطع (BD) في J و (PQ) يقطع (BC) في K و (QR) يقطع (CD) في I

أتبث أن J و K و I مستقيمية

التوازي في الفضاء

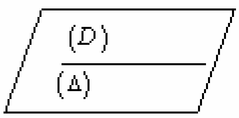
1- المستقيمات المتوازية

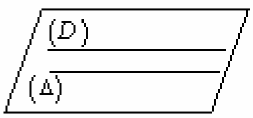
أ- تعريف

نقول إن مستقيمين (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء إذا تحقق الشرطان التاليان

- أن يكون (D) و (Δ) مستوائيين
- أن يكون (D) و (Δ) منفصلان أو منطبقان

نكتب $(D)//(\Delta)$





ملاحظة

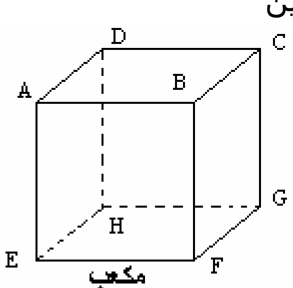
لا يكفي أن يكون (D) و (Δ) منفصلين لكي يكون متوازيين

مثال

(AE) و (BC) منفصلان و لكن غير متوازيين.

$(AD)//(BC)$

$(DC)//(EF)$

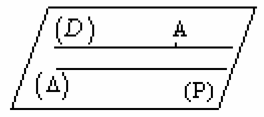


مكعب

ب- مبرهنة

من نقطة معلومة خارج مستقيم يمر مستقيم وحيد يوازيه في الفضاء

البرهان



لدينا $A \notin (D)$ و بالتالي يوجد مستوى

وحيد (P) يحتوي على A و (D)

وحسب موضوعة اقليدس في المستوى (P) ، يمر مستقيم وحيد

(Δ) يوازي (D)

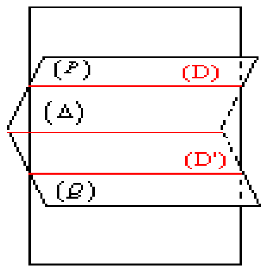
إذن (D) و (Δ) متوازيان في الفضاء

ج- مبرهنة

كل مستقيمين متوازيين قطعا في الفضاء يحددان مستوى وحيدا

د- مبرهنة (نقبلها)

إذا احتوى مستويان متقاطعان على مستقيمين متوازيين قطعا فان تقاطعهما هو مستقيم مواز لهذين المستقيمين.



ذ- مبرهنة

إذا كان مستقيمان متوازيين في الفضاء فن كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

ملاحظة

إذا كان مستقيمان متوازيين فكل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر

تمرين

ليكن $ABCDE$ هرما قاعدته متوازي أضلاع لتكن B' و C' منتصفي $[AB]$ و $[AC]$ على التوالي.

أنشئ الشكل

1- أثبت أن $(DE)//(B'C')$

2- ليكن (Δ) تقاطع المستويين (ABC) و (ADE)

بين أن $(\Delta)//(B'C')$

2- توازي مستقيم و مستوى

أ-تعريف

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا كان (D) و (P) منفصلان أو (D) ضمن (P)

نكتب $(D)//(P)$

ب- مبرهنة

يكون مستقيم (D) موازيا لمستوى (P) إذا و فقط إذا وجد مستقيم ضمن (P) يوازي (D)

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا . I و J و K منتصفات $[AB]$

و $[EF]$ و $[HG]$ على التوالي

أثبت أن (HI) يوازي المستوى (JKC)

3- توازي مستويين

أ- تعريف

يكون مستويان (P) و (Q) متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا كانا منطبقين أو منفصلين.

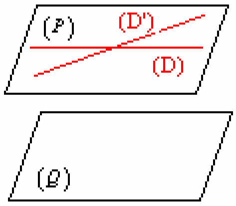
نكتب $(P)//(Q)$

ملاحظة

إذا كان $(P)//(Q)$ فان كل مستقيم ضمن أحدهما يوازي المستوى الآخر.

ب- مبرهنة

يكون مستويان متوازيين في الفضاء إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيمين متقاطعين يوازيين المستوى الآخر



ج- مبرهنة

إذا وازى مستويان مستوى ثالثا فانهما يكونان متوازيين

د- مبرهنة

من نقطة في الفضاء يمر مستوى و حيد مواز لمستوى معلوم

البرهان

ليكن (P) مستوى و A نقطة في الفضاء

نعتبر (D) و (Δ) متقاطعين ضمن المستوى (P)

يوجد مستقيم وحيد (D') مار من A و يوازي (D)

يوجد مستقيم وحيد (Δ') مار من A و يوازي (Δ)

(D') و (Δ') يحدان مستوى وحيد (Q)

(Q) يوازي (P)

ذ- نتائج

- إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يخترق أحدهما يخترق الآخر
- إذا توازى مستويان فان كل مستوى يقطع أحدهما يقطع الآخر
- إذا توازى مستويان فان كل مستقيم يوازي أحدهما يوازي الآخر

تمرين

ليكن (P) و(Q) مستويين متوازيين قطعا . نعتبر $A\in(P)$ و BCD مثلث ضمن (Q) . لتكن I و J و K منتصفات $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$ على التوالي. المستقيم (CK) يخترق المستوى (P) في R.

1- أنشئ الشكل
2- أتبث أن المستوى (IJK) يوازي (P)
3- أتبث أن $(CD)//(AR)$

تمرين

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي المستطيلات و I منتصف $[GH]$

1- لتكن $(EI)\cap(FH)=\{M\}$
بين أن المستويين (AEI) و (AFH) يتقاطعان وفق (AM)
2- أ- بين أن النقط E و F و D و C مستوائية
ب- بين أن $(CF)//(DE)$
3- بين أن $(CFH)//(BDE)$
4- بين أن (CI) يخترق المستوى (ADH)