الوحدة 8

توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

Equilibre d'un solide en rotation auteur d'un axe fixe

I) عزم قوة بالنسبة لمحور ثابت

1 - مفعول قوة على دوران جسم صلب

- عندما نطبق قوة $\vec{F}_1$ على الباب بحيث خط تأثيرها يتقاطع مع محور دوران الباب فإن هذه القوة لا تدير الباب، نقول إن مفعول هذه القوة على دوران الباب منعدم.
- عندما نطبق قوة $\vec{F}_2$ على الباب بحيث خط تأثيرها مواز لمحور دوران الباب فإن هذه القوة لا تدير الباب، نقول إن مفعول هذه القوة على دوران الباب منعدم.
- عندما نطبق قوة $\vec{F}_3$ على الباب متعامدة معه و لا تتقاطع مع محور دوران الباب ، فإن هذه القوة تدير الباب و مفعول القوة على دوران الباب يزداد كلما كانت المسافة الفاصلة بين نقطة تأثير القوة و محور الدوران كبيرة أو كلما كانت شدة القوة كبيرة .

نسمي مفعول قوة على دوران الباب عزم قوة

2 - تعبير عزم قوة

1.2 - نشاط تجريبي

نغير القوة $\vec{F}$ أو المسافة d الفاصلة بين خط تاثير القوة و محور الدوران Δ .

أ – أنجز عدة قياسات ، ثم أحسب الجداء بين شدة القوة $\vec{F}$ و المسافة d .

ب - ماذا تستنتج ؟

2.2 - استثمار

أ - جدول القياسات

F (N)	2,2	3,2	3,8	4,3
d (m)	0,074	0,051	0,043	0,038
F.d (N.m)	0,1628	0,1632	0,1634	0,1634

ب - نلاحظ أن الجداء F.d يساوي ثابتة . نسمي هذا الجداء عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لمحور الدوران Δ و نرمز له ب $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$

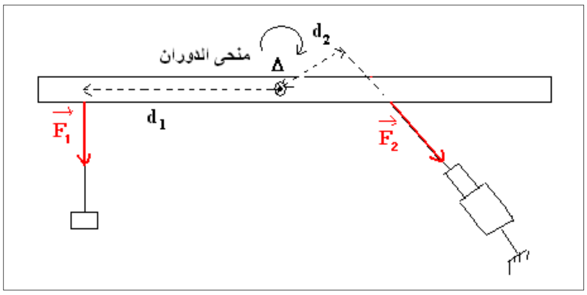
3.2 - عزم قوة مقدار جبري

نختار منحى موجب للدوران .

- إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير المجموعة في المنحى الموجب فإن عزمه هذه القوة موجب $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = F.d$
- إذا كانت القوة $\vec{F}$ تدير المجموعة عكس المنحى الموجب فإن عزمه هذه القوة سالب $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = - F.d$

II) توازن جسم قابل للدوران حول محور ثابت

1 - نشاط تجريبي



نعتبر التجربة المنجزة في الشكل جانبه حيث كتلة الكتلة المعلمة $m = 200g$ و محور التوازن Δ يمر من مركز قصور العارضة المتجانسة .

أ - حقق توازن العارضة و أعط المسافتين d_1 و d_2 و الشدتين F_1 و F_2 .

ب - أجرد القوى المطبقة على العارضة.

ج - أحسب المجموع الجبري لعزوم كل القوى المطبقة على العارضة .

ماذا تستنتج ؟

2 - استثمار

أ - نحقق توازن العارضة و نجد $d_1 = 8cm$ ، $d_2 = 3,2cm$

$F_1 = m.g = 0,2.10 = 2N$ و $F_2 = 5N$

ب - المجموعة المدروسة : { العارضة }

جرد القوى

- قوى التماس : $\vec{F}_1$: تأثير الخيط الرأسي $\vec{F}_2$: تأثير الخيط المائل $\vec{R}$: تأثير محور الدوران
- قوى عن بعد : $\vec{P}$ وزن العارضة

ج - لنحسب المجموع الجبري لعزوم كل القوى المطبقة على العارضة

$$\Sigma\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R})$$

$\mathcal{M}(\vec{F}_1) = - F_1.d_1 = 2.0,08 = 0,16$ N.m $\qquad \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) = F_2.d_2 = 5.0,032 = 0,16$ N.m

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = 0$ لأن خطا تأثيرهما يتقاطعان مع محور الدوران Δ

نستنتج أن $\Sigma\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$

3 ـ تعميم : مبرهنة العزم

عند توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت Δ أيا كان ، يكون المجموع الجبري لعزوم كل القوى المطبقة عليه منعدما .

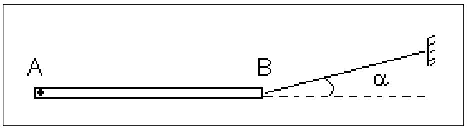
4 ـ شرطا توازن جسم صلب قابل للدوران حول محور ثابت

عندما يكون جسم صلب في توازن تحت تأثير عدد من القوى فإن الشرطين الآتيين يتحققان في نفس الوقت

- الشرط الأول : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ هذا الشرط يحقق توازن مركز قصور الجسم الصلب

- الشرط الثاني : $\Sigma \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0$ هذا الشرط لازم لغياب دوران الجسم .

5 ـ تمرين تطبيقي



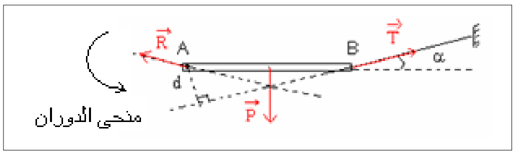
نعتبر عارضة AB متجانسة طولها $L = 1m$ و كتلتها $m = 1kg$ ، قابلة للدوران حول محور ثابت أفقي يمر من طرفها A . مشدودة عند طرفها الآخر بحيث تبقى أفقية . الخيط يكون زاوية $\alpha = 30°$ مع المستقيم الأفقي . أنظر الشكل .

أ ـ أجرد القوى المطبقة على العارضة .

ب ـ بتطبيق مبرهنة العزم أوجد شدة توتر الخيط.

ج ـ بتطبيق الشرط الأول للتوازن أوجد شدة تأثير المحور Δ .

الحل



أ ـ جرد القوى : $\vec{T}$: توتر الخيط $\vec{R}$: تأثير محور الدوران $\vec{P}$: وزن العارضة

ب ـ $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}) + \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{T}) = 0 \Rightarrow T.d - mg.\frac{L}{2} = 0$

$$T.L.\sin\alpha - mg\frac{L}{2} = 0 \Rightarrow T = mg = 10N$$

ج ـ نرسم الخط المضلعي لمتجهات القوى و يكون مثلث متوازي الأضلاع . إذن $R = P = T = 10N$

III) المزدوجات les couples

1 ـ مزدوجة قوتين

1.1 ـ تعريف

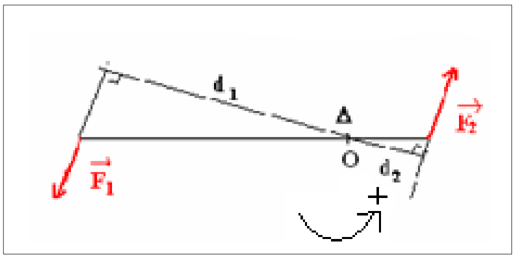
مزدوجة قوتين $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ هي مجموعة قوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ لهما نفس الشدة و منحيان متعاكسان و خطا تأثيرهما متوازيان قطعا .

$F = F_1 = F_2$ الشدة المشتركة لمتجهتي القوتين .

2.1 ـ أمثلة

نطبق مزدوجة قوتين على الصنبور ، على مفك البراغي ، على المفتاح ، على المقود ، . . .

3.1 ـ عزم مزدوجة قوتين



$$\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = \mathcal{M}(\vec{F}_1) + \mathcal{M}(\vec{F}_2)$$
$$= F.d_1 + F.d_2$$
$$= F.d$$

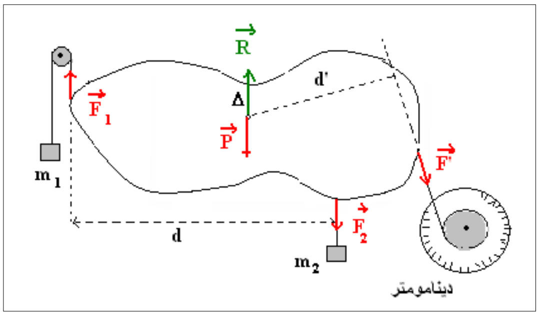
بصفة عامة عزم مزدوجة قوتين $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = \pm F.d$

حيث F الشدة المشتركة لمتجهتي القوتين وd المسافة الفاصلة بينهما .

عزم مزدوجة قوتين لا يتعلق بمحور الدوران .

2 ـ توازن جسم صلب تحت تأثير عدد من القوى و عدد من المزدوجات

1.2 ـ نشاط تجريبي



يمثل الشكل جانبه صفيحة في توازن تحت تأثير عدد من القوى و عدد من المزدوجات .

أ ـ أجرد القوى و المزدوجات المطبقة على الصفيحة .

ب ـ أحسب المجموع الجبري لعزوم كل القوى و المزدوجات المطبقة على الصفيحة .

ج ـ ماذا تستنتج ؟

2.2 ـ أستثمار

أ ـ الصفيحة تخضع لمزدوجة قوتين $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ ، لتأثير الدينامومتر $\vec{F}'$ ، لتأثير محور الدوران Δ $\vec{R}$ و لوزنها $\vec{P}$

ب ـ $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = +F.d = m.g.d = 0{,}2.10.0{,}1 = 0{,}2N.m$ $\qquad \mathcal{M}(\vec{F}') = -F'.d' = -4.0{,}048 = -0{,}192$

$\mathcal{M}(\vec{P}) = \mathcal{M}(\vec{R}) = 0$ المجموع الجبري لعزوم القوى $\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) + \mathcal{M}(\vec{F}') + \mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R})$

$$\sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = 0{,}2 - 0{,}192 + 0 + 0 = 0{,}08N.m \approx 0$$

3.2 - تعميم مبرهنة العزم
عندما يكون جسم صلب ، قابل للدوران حول محور ثابت أيا كان ، في توازن تحت تأثير عدد من القوى و عدد من المزدوجات فإن المجموع الجبري لعزوم كل هذه المزدوجات و كل هذه القوى يساوي صفرا .

3 - تعميم المزدوجة
المزدوجة هي كل تأثير شبيه بتأثير مزدوجة قوتين نمثلها بمجموعة من القوى $\vec{f}_i$ بحيث $\sum \vec{f}_i = \vec{0}$ و يميزها عزم ثابت .

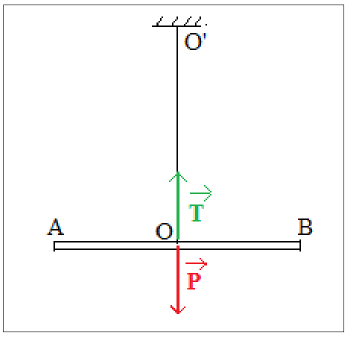
مثال : مزدوجة قوتين ، المزدوجة المحركة ، مزدوجة اللي ، المزدوجة المقاومة ، . . .

IV) مزدوجة اللي Couple de torsion

1 - إبراز مزدوجة اللي
1.1 - نشاط تجريبي
نعتبر قضيبا (AB) متجانسا ، كتلته m مرتبط من منتصفه O إلى سلك فولاذي ، رأسي ’OO . السلك مرتبط من طرفه العلوي ’O إلى حامل . (أنظر الشكل)

نطبق على القضيب مزدوجة قوتين $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ ، فيلتو بزاوية θ و يبقى في حالة توازن . عندما نزيل مزدوجة القوتين $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ يعود القضيب إلى حالة توازنه الأول .

بدراسة توازن القضيب (AB) على الحالتين التين يأخذهما القضيب .



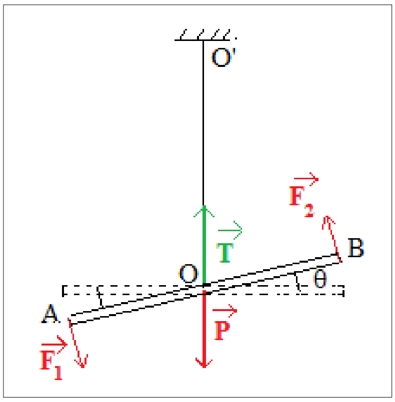
2.1 - استثمار
التوازن الأول
المجموعة المدروسة : { القضيب (AB) }

جرد القوى

$\vec{T}$: توتر السلك $\vec{P}$: وزن العارضة

للقوتين $\vec{P}$ و $\vec{T}$ نفس خط التأثير ، نفس الشدة و منحيان متعاكسان . أي $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$ و

$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=0$ بحيث Δ يتطابق مع ’OO



التوازن الثاني
المجموعة المدروسة : { القضيب (AB) }

جرد القوى

$\vec{T}$: توتر السلك $\vec{P}$: وزن العارضة

$(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$: مزدوجة قوتين

C_t : مزدوجة اللي

تعليل

القضيب (AB) في توازن تحت تأثير $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ و $\vec{T}$ و $\vec{P}$. نلاحظ أن السلك يلتو بزاوية θ .

لكي يقاوم السلك التواءه يطبق مجموعة من القوى $\vec{f}_i$ إذن $\vec{P}+\vec{T}+\sum\vec{f}_i+\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}$ و

$$\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)+\mathcal{M}(\vec{P})+\mathcal{M}(\vec{T})+\mathcal{M}(\sum\vec{f}_i)=0$$

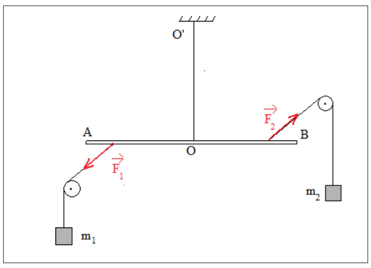
لدينا $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$ و $\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}$ و منه فإن $\boxed{\sum\vec{f}_i=\vec{O}}$ و من جهة أخرى لدينا $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=0$ و $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)\neq 0$

إذن $\boxed{\mathcal{M}(\sum\vec{f}_i)\neq 0}$

تمثل إذن $\sum\vec{f}_i$ مزدوجة شبيهة بمزدوجة قوتين نرمز لها ب C_t و تسمى مزدوجة اللي .

2 - عزم مزدوجة اللي
1.2 - نشاط تجريبي
نعتبر قضيبا (AB) متجانسا ، مرتبط من منتصفه O إلى سلك فولاذي ، رأسي ’OO .
السلك مرتبط من طرفه العلوي ’O إلى حامل (أنظر الشكل)

بواسطة كتلتين معلمتين m_1 و m_2 ، نطبق على القضيب مزدوجة قوتين $(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ ، فيلتو بزاوية θ و يبقى في حالة توازن . لدينا $m_1 = m_2 = m$ و $F_1 = F_2 = F$. نقيس الزاوية θ بواسطة الأسطوانة المدرجة و ذلك بإعادة القضيب (AB) إلى و ضعه البدئي



نغير عزم مزدوجة القوتين $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ بتغيير F أو بتغيير المسافة d الفاصلة بين القوتين $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

أ ـ بدراسة توازن القضيب (AB) أوجد علاقة بين عزم مزدوجة القوتين $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ و عزم مزدوجة اللي $\mathcal{M}(C_t)$

ب ـ دون في الجدول أسفله النتائج التجريبية

0,03	0,02	0,02	0,02	0,01	0,01	0	m (kg)
0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0	F (N)
							d (m)
							(N.m) $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=F.d$
							θ (°)
							θ (rad)

ج ـ أرسم في ورقة ميلميترية منحنى الدالة 22 $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=f(\theta)$.

د ـ ماذا تستنتج ؟

2.2 ـ استثمار

أ ـ المجموعة المدروسة : { القضيب (AB) }

جرد القوى

$\vec{T}$: توتر السلك $\vec{P}$: وزن العارضة

$(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$: مزدوجة قوتين

C_t : مزدوجة اللي

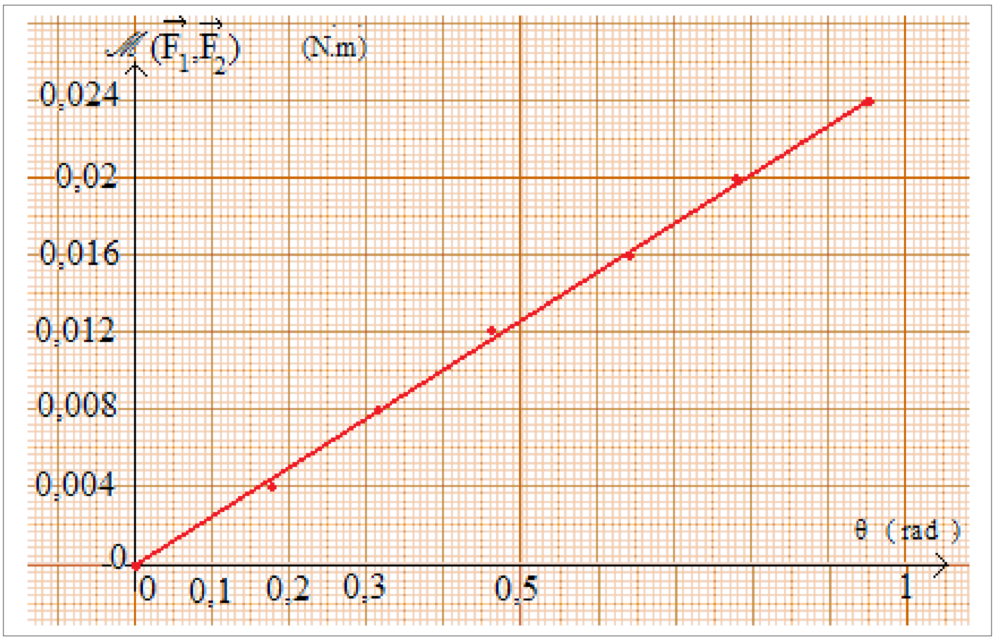
نطبق على القضيب (AB) مبرهنة العزم $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)+\mathcal{M}(\vec{P})+\mathcal{M}(\vec{T})+\mathcal{M}(C_t)=0$

بما أن $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})+\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})=0$ فإن $\mathcal{M}(C_t)=-\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$

ب ـ جدول القياسات

0,03	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0	m (kg)
0,3	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0	F (N)
0,08	0,1	0,08	0,06	0,04	0,04	0,04	d (m)
0,024	0,020	0,016	0,012	0,008	0,004	0	(N.m) $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=F.d$
55	45	37	27	18	9	0	θ (°)
0,959	0,785	0,645	0,471	0 ,314	0,157	0	θ (rad)

ج ـ رسم منحنى الدالة $\mathcal{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)=f(\theta)$

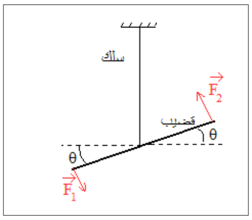


د ـ المنحنى عبارة عن مستقيم يمر من أصل المعلم إذن يوجد تناسب اطرادي بين $\mathscr{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2)$ و الزاوية θ و نعبر عنه بالعلاقة التالية :

$\mathscr{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) = C.\theta$ و منه فإن عزم مزدوجة اللي يوافق العلاقة التالية : $\boxed{\mathscr{M}(C_t) = -C.\theta}$

نسمي C ثابتة اللي

3 ـ تمرين تطبيقي



يمثل الشكل جانبه قضيبا متجانسا طوله $L = 40cm$ معلق من منتصفه بسلك فلزي (f_1) ثابتة ليه $C_1 = 4.10^{-2} N.m.rad^{-1}$ ، و ثبت طرفه الآخر إلى حامل . نطبق عند طرفي السلك مزدوجة قوتين بحيث يبقى خطا تأثيرهما دوما متعامدين مع القضيب و يوجدان في المستوى الأفقي المار به . الشدة المشتركة لمزدوجة القوتين $F = 0{,}05N$.

أ ـ بتطبيق مبرهنة العزم على القضيب أوجد قيمة الزاوية θ_1 التي التوى بها السلك .

ب ـ نعوض السلك (f_1) بسلك آخر (f_2) ثابتة ليه C_2 فيلتو بزاوية $\theta_2 = 40°$ عندما نطبق في طرفي القضيب نفس المزدوجة السابقة . ما قيمة C_2؟

الحل

أ ـ $\mathrm{M}_t = -\mathrm{M}(\vec{F}_1,\vec{F}_2) \Leftarrow -C_1.\theta_1 = -F.d \Leftarrow \theta_1 = \dfrac{F.d}{C_1}$ تطبيق عددي : $\theta = \dfrac{0{,}05.0{,}4}{0{,}04} = 0{,}5rad = 28{,}6°$

ب ـ $C_2 = \dfrac{F.d}{\theta_2} = \dfrac{0{,}05.0{,}4}{0{,}698} = 2{,}8.10^{-2} N.m.rad^{-1}$