

دراسة الدوال و تمثيلها باستعمال دوال مرجعية

1- دراسة و تمثيل مبانيا الدالة $f: x \rightarrow ax^2$ حيث $a \neq 0$

أ- أمثلة

$$f(x) = 2x^2$$

* نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

- ندرس تغيرات f
 $D_f = \mathbb{R}$

f دالة زوجية و منه اقتصار دراستها على $[0; +\infty[$

ليكن x و y من $[0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 2(x + y)$$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

لكل x و y من $[0; +\infty[$ حيث $x \neq y$:

إذن f تزايدية على $[0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		$\searrow \quad \nearrow$	

معادلة C_f هي $y = 2x^2$

C_f متماثل بالنسبة لمحور الأرتاب

ملاحظة

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $0 < 2x^2 < 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0; 1[$

تحت المستقيم $(\Delta): y = 2x$

إذا كان $x > 1$ فإن $2x^2 > 2x$

هذا يعني أن جزء C_f على $]1; +\infty[$

فوق المستقيم $(\Delta): y = 2x$

جدول القيم

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأرتاب كمحور تماثل

* بالمثل أدرس الدالة f حيث $f(x) = \frac{-1}{2}x^2$

ب- الحالة العامة

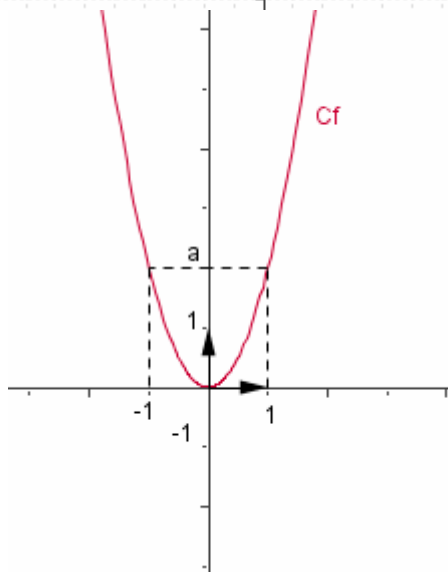
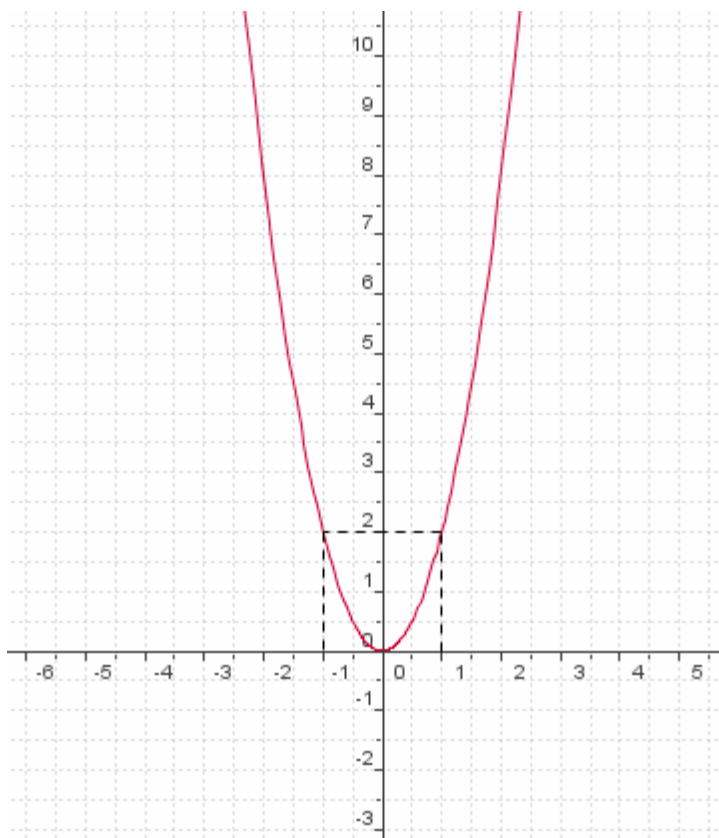
نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ

$$f(x) = ax^2 \text{ حيث } a \neq 0$$

إذا كان $a > 0$ فإن

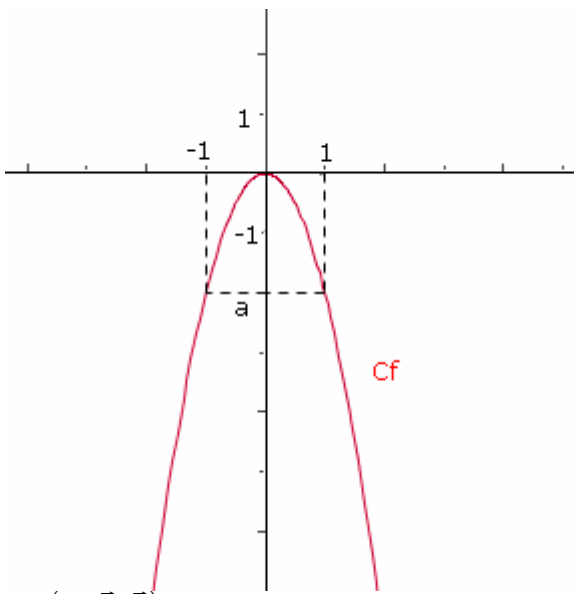
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		$\searrow \quad \nearrow$	

C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأرتاب كمحور تماثل



إذا كان $a < 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		0	



C_f شلجم رأسه O يقبل محور الأرتاب كمحور تماثل

تمرين $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ $f(x) = x^2$

$m(x) = -2x^2$ $h(x) = 3x^2$

1- أعط جدول تغيرات f و g و h و m

2- في نفس المعلم المتعامد الممنظم أنشئ C_f و C_g و C_h و C_m

2- دراسة الدالة $x \rightarrow ax^2 + bx + c$

لتكن $M(x; y)$ و $M'(X; Y)$ نقطتين و $\vec{u}(\alpha; \beta)$ متجهة في مستوى منسوب الى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$

$$\begin{cases} X = x + \alpha \\ Y = y + \beta \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} X - \alpha = x \\ Y - \beta = y \end{cases} \text{ تكافئ } \overline{MM'} = \vec{u} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

مثال 1 لندرس f حيث $f(x) = 2x^2 - 4x - 3$

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x) = 2(x-1)^2 - 5$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي $y = 2(x-1)^2 - 5$ أي $y + 5 = 2(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1; -5)$ و لتكن $M(x; y)$ و $M'(X; Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \rightarrow 2x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$$\begin{cases} X - 1 = x \\ Y + 5 = y \end{cases} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

$$y = 2x^2 \text{ تكافئ } M(x; y) \in (C)$$

$$Y + 5 = 2(X - 1)^2 \text{ تكافئ}$$

$$M'(X; Y) \in (C_f) \text{ تكافئ}$$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0; 0)$ و محور تماثله

محور الأرتاب فان (C_f) شلجم رأسه $O'(1; -5)$

أي $O'(1; -5)$ و محور تماثله المستقيم ذا المعادلة $x = 1$

و حيث أن الدالة $x \rightarrow 2x^2$ تزايدية على $[0; +\infty[$

و تناقصية على $]-\infty; 0]$ فان الدالة f تزايدية على

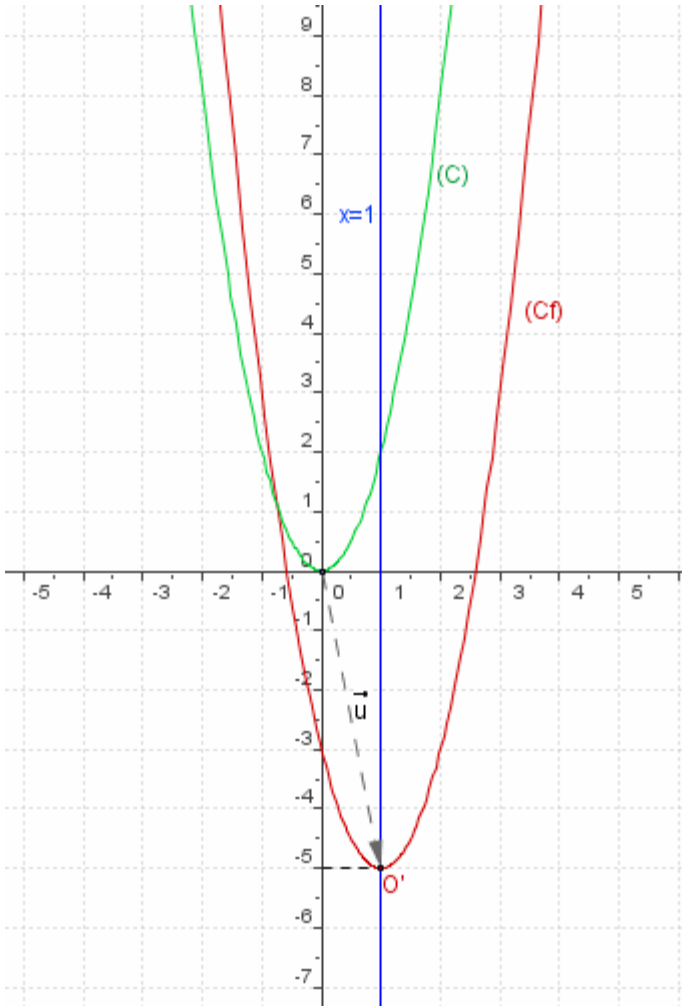
$[1; +\infty[$ و تناقصية على $]-\infty; 1]$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f		-5	

إنشاء المنحنى

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-5	-3	3



مثال 2 لندرس $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ حيث

الشكل القانوني لـ $f(x)$ هو $f(x) = -(x-1)^2 + 4$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي $y = -(x-1)^2 + 4$ أي $y - 4 = -(x-1)^2$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;4)$ ولتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \rightarrow -x^2$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$$\begin{cases} X-1=x \\ Y-4=y \end{cases} \text{ تكافئ } t(M) = M'$$

$y = -x^2$ تكافئ $M(x;y) \in (C)$

تكافئ $Y-4 = -(X-1)^2$

تكافئ $M'(X;Y) \in (C_f)$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) شلجم رأسه $O(0;0)$ و محور

تماثله محور الارايب فان (C_f) شلجم رأسه

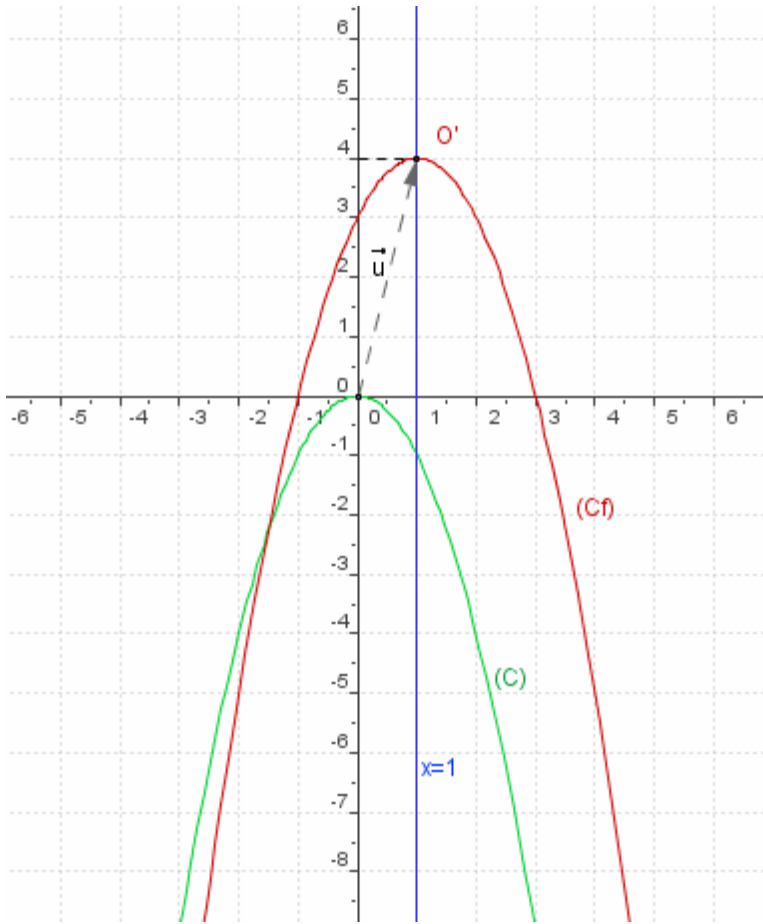
$t(O) = O'$ أي $O'(1;4)$ و محور تماثله المستقيم

ذ المعادلة $x=1$

و حيث أن الدالة $x \rightarrow -x^2$ تناقصية على $[0; +\infty[$

و تزايدية على $]-\infty; 0]$ فان الدالة f تناقصية على

$[1; +\infty[$ و تزايدية على $]-\infty; 1]$



جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f		4	

إنشاء المنحنى

$f(x) = 0$ تكافئ $x = -1$ أو $x = 3$

x	0	1	2	4
$f(x)$	3	4	3	-5

الحالة العامة $x \rightarrow ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$
نشاط

لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

1/ أعط الشكل القانوني لـ f

2/ بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \rightarrow ax^2$ بالإزاحة t ذات المتجهة

$$\vec{u}\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right) \text{ و استنتج طبيعة } (C_f)$$

ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد a

خاصيات

لتكن f دالة حدودية من الدرجة الثانية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^2 + bx + c$ حيث $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ و $a \neq 0$

* $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ لكل x من $\mathbb{R}$ حيث $\alpha = \frac{-b}{2a}$ و $\beta = f(\alpha)$ هذه الكتابة تسمى الشكل القانوني للدالة f

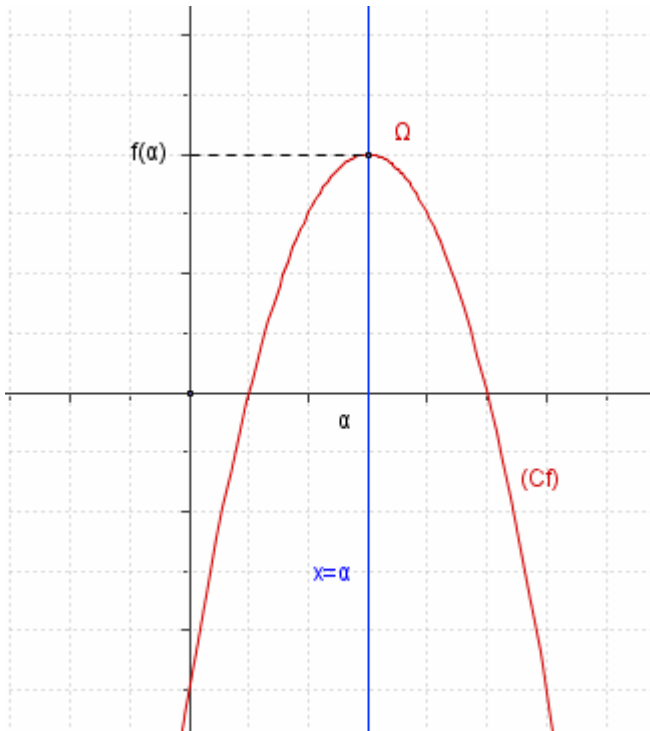
* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \rightarrow ax^2$ بالإزاحة ذا المتجهة $\vec{u}(\alpha; \beta)$

* C_f منحنى f في معلم متعامد هو شلجم رأسه $\Omega(\alpha; \beta)$ و محور تماثله المستقيم $x = \alpha$

$$\text{نضع } \alpha = \frac{-b}{2a}$$

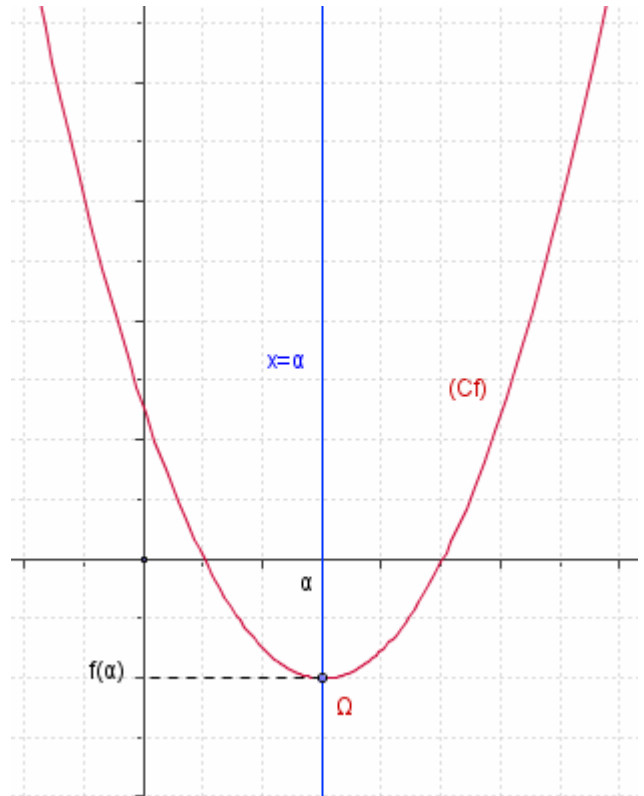
* إذا كان $a < 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$f(\alpha)$	



* إذا كان $a > 0$ فان:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
f		$f(\alpha)$	



3- دراسة الدالة $x \rightarrow \frac{a}{x}$

أ- أمثلة

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{2}{x}$

- ندرس تغيرات f

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0; +\infty[$

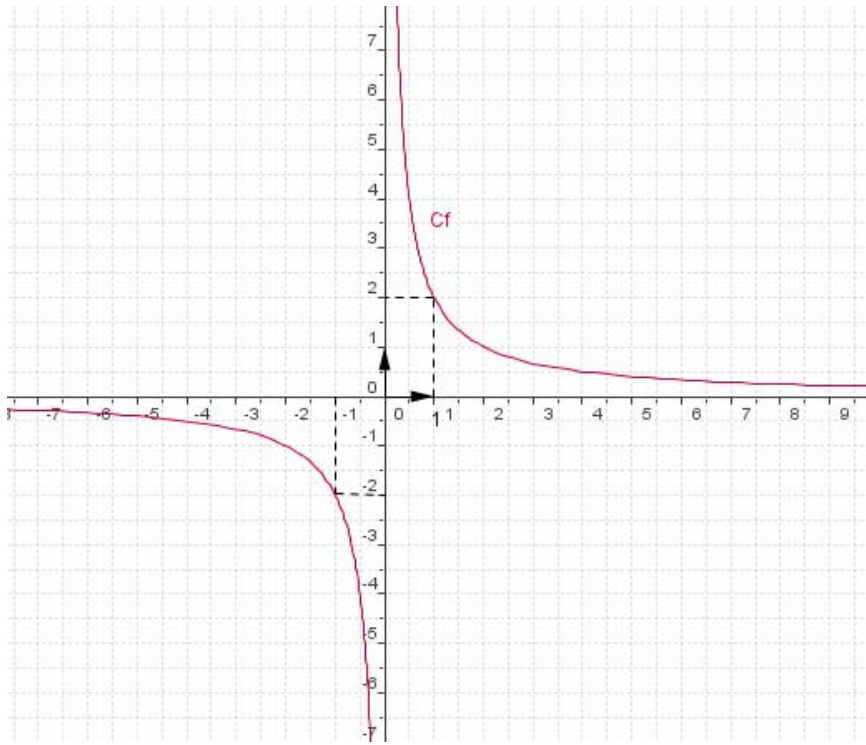
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{-2}{xy}$$

ليكن x و y من $]0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$$

لكل x و y من $]0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

إذن f تناقصية على $]0; +\infty[$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\swarrow$	$\parallel$	$\searrow$

ملاحظة

إذا كان $0 < x < 1$ فإن $\frac{2}{x} > 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $]0; 1[$

فوق المستقيم $(\Delta): y = 2$

إذا كان $x \geq 1$ فإن $0 < \frac{2}{x} \leq 2$

هذا يعني أن جزء C_f على $[1; +\infty[$

تحت المستقيم $(\Delta): y = 2$

جدول القيم

x	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$

C_f هذلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم

* نعتبر الدالة $f(x) = \frac{-1}{x}$

- ندرس تغيرات f

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

f دالة فردية و منه اقتصار دراستها على $]0; +\infty[$

ليكن x و y من $]0; +\infty[$ حيث $x \neq y$

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{1}{xy}$$

إذن f تزايدية على $]0; +\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\swarrow$	$\parallel$	$\searrow$

C_f هذلول مركزه O و مقارباه

محورا المعلم

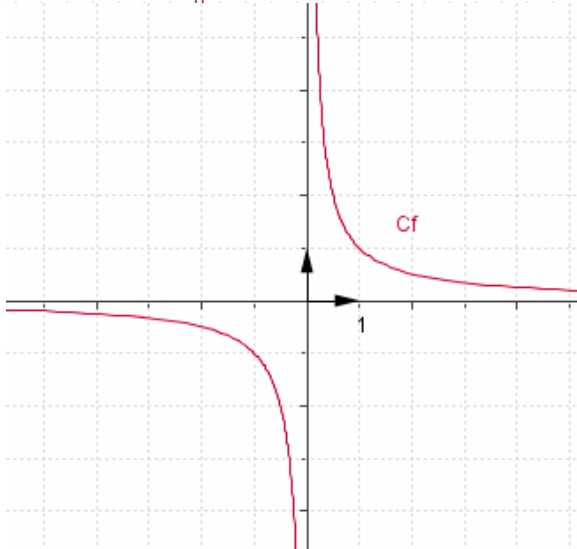
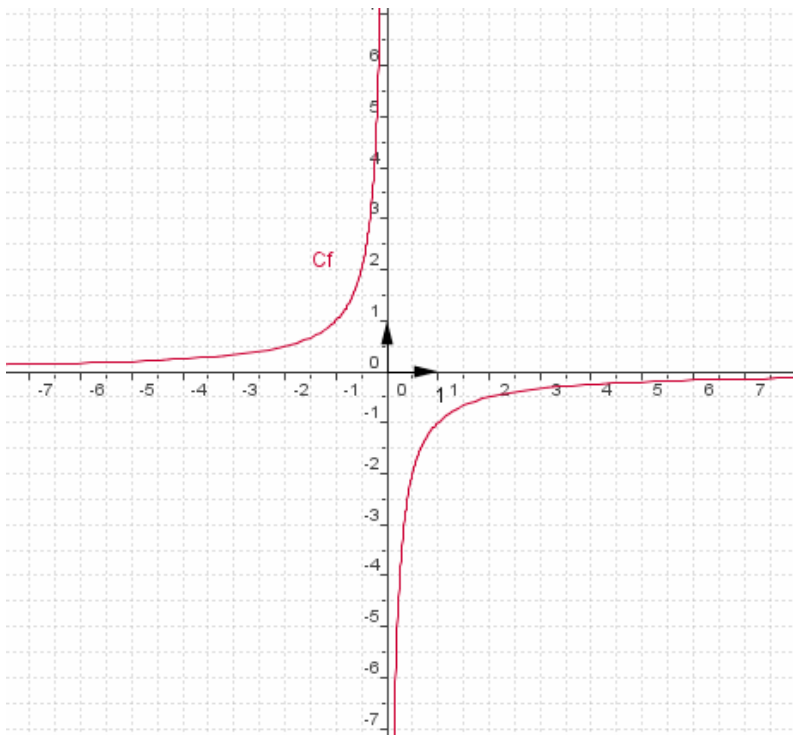
ب- الحالة العامة

نعتبر $f(x) = \frac{a}{x}$

إذا كان $a > 0$ فإن

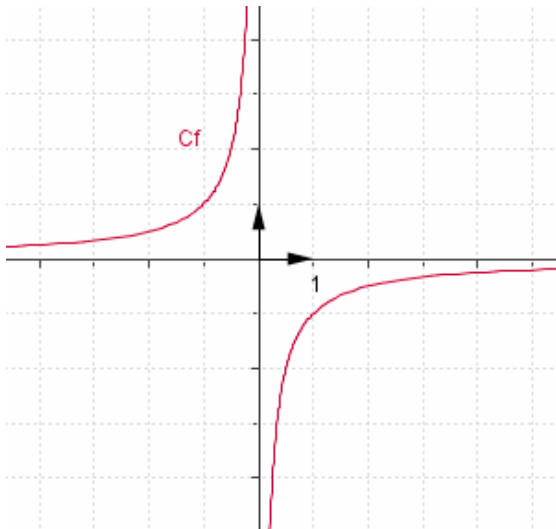
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\swarrow$	$\parallel$	$\searrow$

C_f هذلول مركزه O و مقارباه محورا المعلم



إذا كان $a < 0$ فان

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f			



C_f هذلول مركزه O و مقارياه محورا المعلم

4 - دراسة الدالة $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

مثال 1 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ *

*- بانجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$y - 2 = \frac{3}{x-1} \quad \text{أي} \quad y = 2 + \frac{3}{x-1}$$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(1;2)$ و لتكن $M(x;y)$ و $M'(X;Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \rightarrow \frac{3}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$$t(M) = M' \quad \begin{cases} X-1 = x \\ Y-2 = y \end{cases} \quad \text{تكافئ}$$

$$M(x;y) \in (C) \quad \text{تكافئ} \quad y = \frac{3}{x} \quad \text{تكافئ} \quad Y-2 = \frac{3}{X-1} \quad \text{تكافئ} \quad M'(X;Y) \in (C_f)$$

إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0;0)$ و مقارياه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O) = O'$ أي $O'(1;2)$ و مقارياه المستقيمان اللذان معادلتهما $x=1$ و $y=2$

و حيث أن الدالة $x \rightarrow \frac{3}{x}$ تناقصية على كل من $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ فان الدالة f تناقصية على

كل من $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$

جدول التغيرات

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f			

إنشاء المنحنى

$$f(x) = 0 \quad \text{تكافئ} \quad x = -\frac{1}{2}$$

x	0	1	2	5
$f(x)$	-1	//	5	$\frac{11}{4}$



مثال 2 $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ *

*- بإيجاز القسمة الاقليدية نحصل على أن

$$f(x) = 2 + \frac{-1}{x+2}$$

معادلة C_f في المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ هي $y - 2 = \frac{-1}{x+2}$ أي $y = 2 + \frac{-1}{x+2}$

نعتبر t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(-2; 2)$ ولتكن $M(x; y)$ و $M'(X; Y)$ نقطتين

ليكن (C) منحنى الدالة $x \rightarrow \frac{-1}{x}$

لنبين أن C_f هو صورة (C) بالإزاحة t

$$t(M) = M' \quad \begin{cases} X+2 = x \\ Y-2 = y \end{cases} \text{ تكافئ}$$

$$M(x; y) \in (C) \quad \text{تكافئ} \quad y = \frac{3}{x} \quad \text{تكافئ} \quad Y-2 = \frac{-1}{X+2} \quad \text{تكافئ} \quad M'(X; Y) \in (C_f)$$

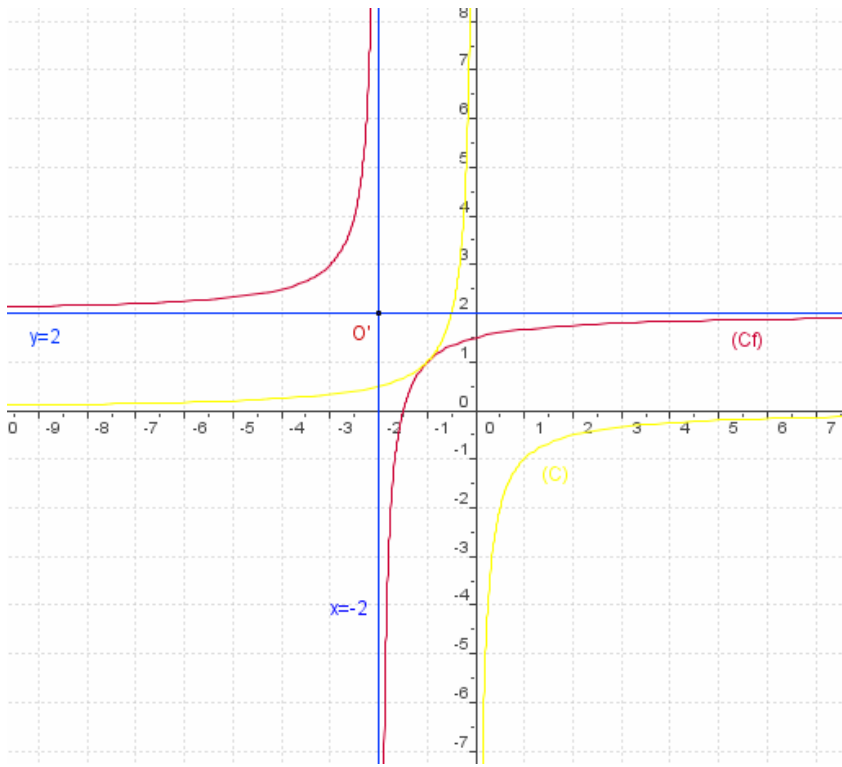
إذن (C_f) هو صورة (C) بالإزاحة t

وحيث أن (C) هذلول مركزه $O(0; 0)$ و مقارياه محورا المعلم فان (C_f) هذلول مركزه

$t(O) = O'$ أي $O'(-2; 2)$ و مقارياه المستقيمان اللذان معادلتهم $x = -2$ و $y = 2$

وحيث أن الدالة $x \rightarrow \frac{-1}{x}$ تزايدية على كل من $]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$ فان الدالة f تزايدية على

كل من $]-\infty; -2[$ و $]-2; +\infty[$



جدول التغيرات			
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f			

إنشاء المنحنى

$$f(x) = 0 \text{ تكافئ } x = -\frac{3}{2}$$

x	-3	-2	-1	0	2
$f(x)$	1	//	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$

الحالة العامة $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$

نشاط

لتكن f الدالة المتخاطبة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ بـ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$

1- حدد α و β و λ حيث $f(x) = \beta + \frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

2- بين أن المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \rightarrow \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha; \beta)$ واستنتج طبيعة (C_f)

3- بين أن تغيرات f مرتبطة بالعدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ثم أعط جدول تغيرات وفق العدد $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

خاصيات

لتكن f الدالة المتخاطبة المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$ بـ $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ حيث $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$

* توجد أعداد حقيقية α و β و λ حيث $f(x) = \beta + \frac{\lambda}{x-\alpha}$ لكل x من $\mathbb{R} - \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

* المنحنى C_f هو صورة المنحنى (C) الممثل للدالة $x \rightarrow \frac{\lambda}{x}$ بالإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}(\alpha; \beta)$

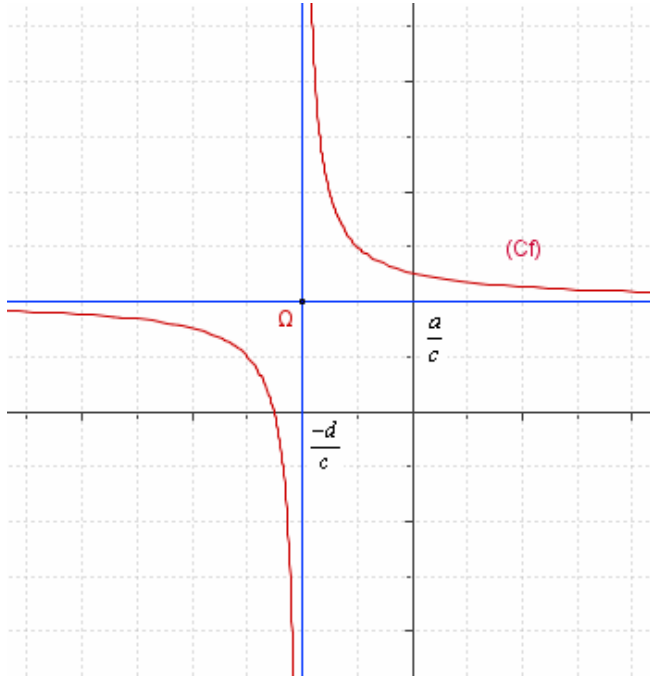
* C_f منحنى f في معلم متعامد هو هذلول مركزه $\Omega(\alpha; \beta)$ و مقارباه هما المستقيمان المعروفان بـ

$$x = \alpha \text{ و } y = \beta$$

$$\text{ملاحظة: } \alpha = \frac{-d}{c} \text{ و } \beta = \frac{a}{c}$$

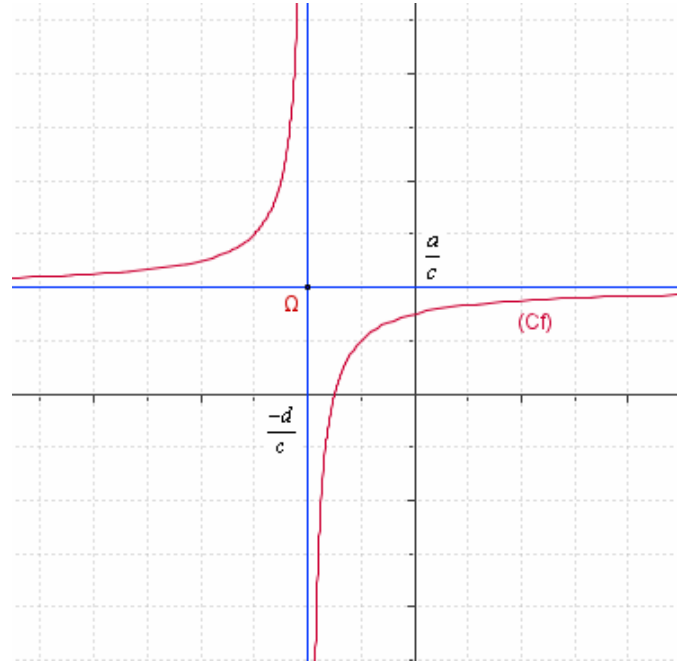
*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$



*- إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$ فان

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$



5- دالة الجيب sin - دالة جيب التمام cos أ / دالة الجيب sin تعريف

الدالة $\sin us$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيبه $\sin x$
نكتب $\sin : x \rightarrow \sin x$

خاصية 1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin(-x) = -\sin x$ نقول ان الدالة $\sin$ فردية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$

ومنه $\sin x = \sin(x + 2\pi)$

خاصية 2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\sin x = \sin(x + 2\pi)$ نقول ان الدالة $\sin$ دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن $M(x; \sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

و حيث $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi; \sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\sin})$

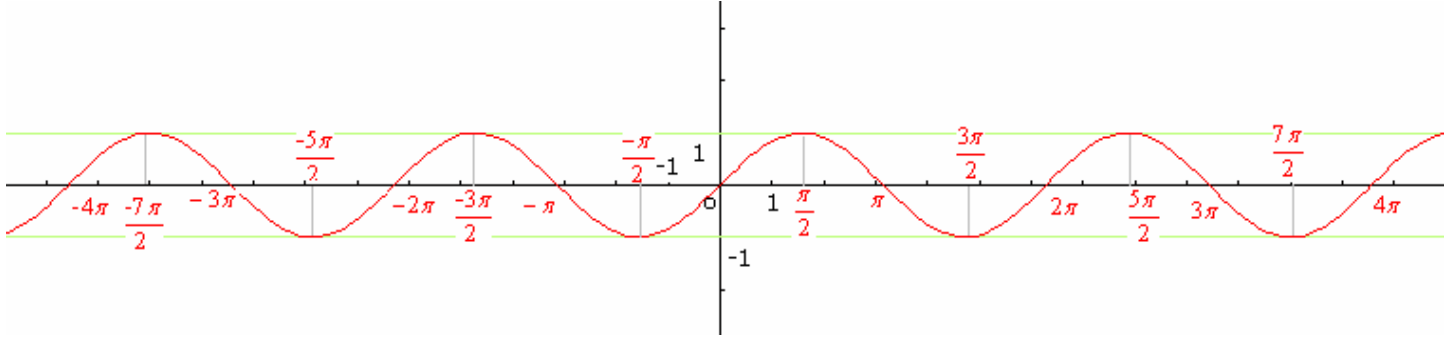
و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi \vec{i}$ أي صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi \vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى على مجال سعته 2π مثلاً $[-\pi; \pi]$ واستنتاج ما تبقى من المنحنى

في المجالات $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi \vec{i}$

ملاحظة

$\sin$ فردية و منه المنحنى متماثل بالنسبة لأصل المعلم
يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\sin})$ على $[0; \pi]$ واستنتاج المنحنى $(C_{\sin})$ على $[-\pi; 0]$
التمثيل المبياني لدالة $\sin$



ب/ دالة جيب التمام $\cos$

تعريف

الدالة $\cos$ هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بجيب تمامه $\cos x$
نكتب $\cos : x \rightarrow \cos x$

خاصية 1

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos(-x) = \cos x$ نقول إن الدالة $\cos$ زوجية

* رأينا أن لكل x من $\mathbb{R}$ و لكل k من $\mathbb{Z}$ $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$

ومنه $\cos x = \cos(x + 2\pi)$

خاصية 2

لكل x من $\mathbb{R}$ $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ نقول إن الدالة $\cos$ دورية و 2π دور لها

التأويل الهندسي

نعتبر المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

لتكن $M(x; \cos x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و حيث $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ فان $M'(x + 2k\pi; \sin x)$ نقطة من المنحنى $(C_{\cos})$

و بالتالي $\overrightarrow{MM'} = 2k\pi\vec{i}$ أي صورة M بالإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

و من هذا نستنتج أنه يكفي رسم المنحنى $(C_{\cos})$ على مجال سعته 2π مثلا $[-\pi; \pi]$ واستنتاج ما تبقى من

المنحنى في المجالات $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ باستعمال الإزاحة ذات المتجهة $2k\pi\vec{i}$

ملاحظة

$\cos$ زوجية و منه المنحنى $(C_{\cos})$ متماثل بالنسبة لمحو الاراتب

يكفي تمثيل المنحنى $(C_{\cos})$ على $[0; \pi]$ واستنتاج المنحنى $(C_{\cos})$ على $[-\pi; 0]$

التمثيل المبياني لدالة $\cos$

