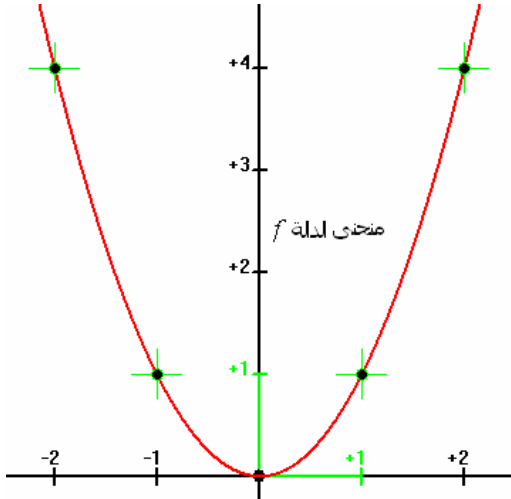


الدوال العكسية

I- صورة مجال بدالة متصلة :



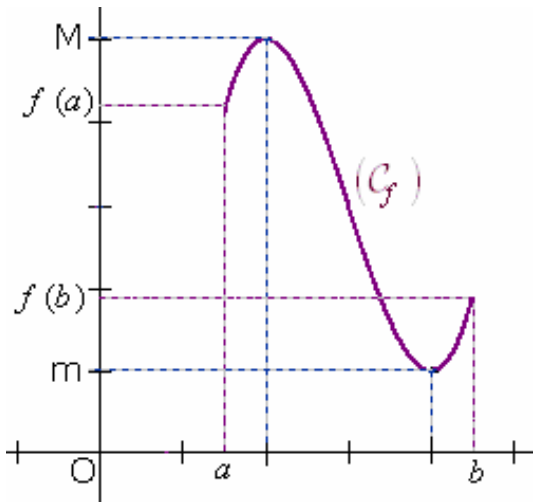
1 - مثال : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x^2$
حدد مبيانيا ما يلي :

$$f([1,2]) \quad \checkmark$$

$$f([-1,1]) \quad \checkmark$$

$$f([-2,0]) \quad \checkmark$$

2 - خاصيات :



- ✓ صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة . (C_f)
- ✓ صورة مجال من \mathbb{R} بدالة متصلة هي أيضا مجال من \mathbb{R} .
- ✓ $f([a,b]) = [m, M]$.

$$M = \text{Max}_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{و} \quad m = \text{Min}_{x \in [a,b]} f(x)$$

ملاحظة : يمكن تحديد صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة
قطعا على مجال من \mathbb{R} كما يلي :

الشكل	رتابة الدالة f	المجال I	المجال $f(I)$
	f تزايدية قطعا على المجال I	$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$
		$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
		$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$
		$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$
	f تناقصية قطعا على المجال I	$[a, b]$	$[f(b), f(a)]$
		$[a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)[$
		$]a, b]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
		$[a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)[$
		$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

مثال : نعتبر الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$

- بين أن f تزايدية قطعاً على كل من المجالين التاليين : $]2, +\infty[$ و $]-\infty, 2[$.
- استنتج صور كل من المجالات التالية بالدالة f : $]2, +\infty[$ و $]3, +\infty[$ و $[3, 4]$.

II- الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبة قطعاً على مجال من \mathbb{R} :

1. تعريف التقابل :

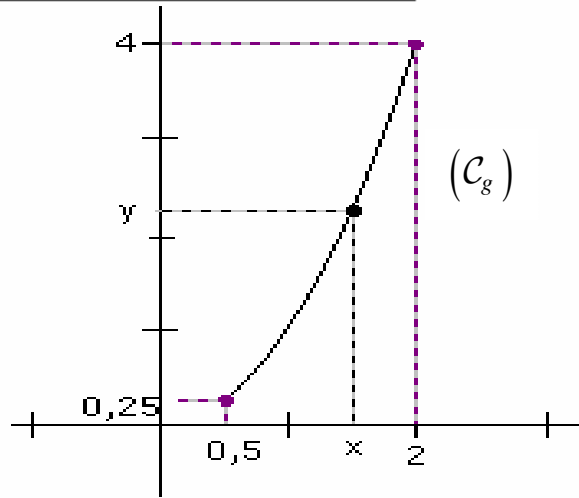
مثال 1 :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,5;2]$ بما يلي : $g(x) = x^2$.

y	0,25	1	2	3	4
سوابق y					

1 - حدد مبيانياً $g([0,5;2])$.

2 - أتمم الجدول التالي :



ملحوظة : نسمي سواي، y ، بالدالة g ، كل عنصر x من المجال $[0,5;2]$ بحيث : $y = g(x)$.

استنتاج : من خلال المنحنى (C_g) ؛ نلاحظ أن كل عنصر y من المجال $[0,25;4]$ ؛ يقبل سابقاً وحيداً x ،

بالدالة g ، في المجال $[0,5;2]$. لهذا نقول إن g **تقابل** من المجال $[0,5;2]$ نحو المجال $[0,25;4]$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[-1,2]$ بما يلي : $h(x) = x^2$.

y	0	0,25	1	3	4
سوابق y					

1- حدد $h([-1,2])$.

2- املأ الجدول التالي :

3- ما ذا تستنتج ؟

تعريف : لتكن A و B مجموعتين غير فارغتين ؛ ولتكن f دالة معرفة من A نحو B . نقول إن f **تقابل** من A نحو B ؛ إذا كان لكل عنصر y من B ؛ سابقاً وحيداً x في A بالدالة f

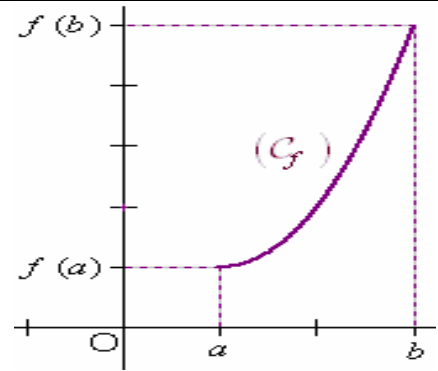
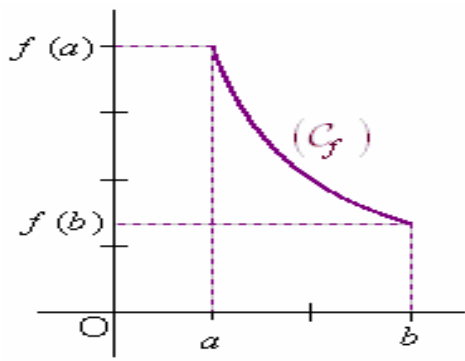
$$\forall y \in B; \exists! x \in A / y = f(x) \quad \text{أي :}$$

$$(a < b)$$

2. خاصة :

لتكن f دالة عددية وليكن I و J مجالين غير فارغين من \mathbb{R} بحيث : $I \subset D_f$.

إذا كانت f **متصلة ورتبة قطعاً** على المجال I ؛
فإنها تكون تقابلاً من I نحو المجال J بحيث : $J = f(I)$.



مثال: الدالة الواردة في المثال 1، من II-1 ($f(x) = x^2$)، تقابل من المجال $[0, 5; 2]$ نحو المجال $[0, 25; 4]$.

3. التقابل العكسي:

مثال 1: لتكن f دالة معرفة على المجال $I = [1, 2]$ بما يلي :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

- 1- بين أن f تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .
- 2- ليكن $y \in J$ وليكن $x \in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f . أكتب x بدلالة y ؟

الجواب: 1- ليكن $x \in I$. لدينا : $f'(x) = (x^2 - 2x + 3)' = 2x - 2 = 2(x - 1)$. ومنه فإن :

$$x \in]1, 2] \Rightarrow 1 < x \leq 2 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$$

إذن $f' > 0$ على المجال I باستثناء العدد 1 حيث $f'(1) = 0$. ومنه نستنتج أن دالة f

تزايدية قطعاً على المجال I . وبما أن f متصلة على المجال I ، فإن :

$$f \text{ تقابل من المجال } I \text{ نحو المجال } J = f(I) = f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [2, 3]$$

2- ليكن $y \in J$ وليكن $x \in I$ السابق الوحيد ل y بالدالة f لدينا :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = (x - 1)^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = y - 2$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y - 2} \quad \text{أو} \quad x - 1 = -\sqrt{y - 2}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y - 2} \quad (\text{لأن : } x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1 + \sqrt{y - 2}}$$

الدالة المعرفة من المجال $J = [2, 3]$ نحو المجال $I = [1, 2]$ والتي تربط كل عنصر t من

المجال J بالعدد الحقيقي $1 + \sqrt{t - 2}$ ، تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ونرمز له

$$f^{-1} : J = [2, 3] \rightarrow I = [1, 2]$$

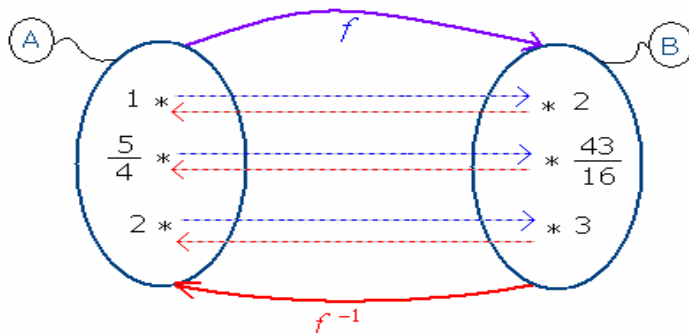
بالرمز f^{-1} ؛ ونكتب :

$$x \mapsto f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$$

مثال: املأ الجدولين التاليين :

x	2	$\frac{43}{16}$	3
$f^{-1}(x)$			

x	1	$\frac{5}{4}$	2
$f(x)$			



تعريف : لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال غير فارغ I ؛ ضمن D_f ؛ نعلم أن f تقابل من المجال I نحو المجال $J = f(I)$.

الدالة المعرفة من المجال J نحو المجال I والتي تربط كل عنصر x من J بالعنصر y من I بحيث : $x = f(y)$ ؛ تسمى التقابل العكسي للدالة f ؛ ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

قاعدة التحويل :

ليكن f تقابلاً من مجال I نحو مجال J ؛ وليكن x عنصراً من J و y عنصراً من I . لدينا :

$$\boxed{y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y)}$$

استنتاج : ليكن f تقابلاً من مجال I نحو $J = f(I)$. لدينا :

✓ لكل عنصر x من I : $f^{-1}(f(x)) = x$

✓ لكل عنصر x من J : $f(f^{-1}(x)) = x$

مثال 2 : لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I = [3,4]$ بما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{x-2}$$

1- بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J ينبغي تحديده .

2- حدد التقابل العكسي g^{-1} .

3- أنشئ (C_g) و $(C_{g^{-1}})$ في نفس المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

طريقة 1 : إعادة للطريقة المستعملة في المثال 1 .

طريقة 2 : استعمال قاعدة التحويل . ليكن $x \in J = [2,3]$ و $y \in I = [3,4]$ بحيث : $y = g^{-1}(x)$. لدينا :

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y}{y-2}$$

$$\Leftrightarrow x(y-2) = y$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x = y$$

$$\Leftrightarrow y(x-1) = 2x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2x}{x-1}}$$

(لأن : $x \in [2,3] \Rightarrow x \neq 1$)

$$g^{-1} : J = [2,3] \rightarrow I = [3,4]$$

وبالتالي فإن :

$$x \mapsto g^{-1}(x) = \frac{2x}{x-1}$$

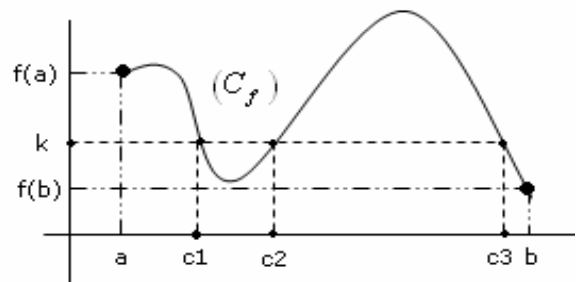
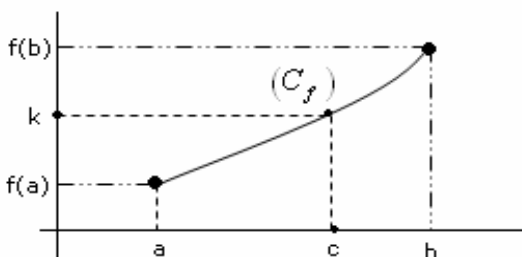
خاصية : إذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على مجال غير فارغ I ؛ فإن $(I \subset D_f)$ ؛ فإن :

✓ f تقابل من المجال I نحو المجال $J = f(I)$.

✓ f^{-1} متصلة على المجال $J = f(I)$ ؛ ولها نفس رتبة الدالة f .

✓ (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول لمعلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

III- مبرهنة القيم الوسطية :



1 - مبرهنة :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ ؛ فإن لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(c) = k$.

مثال :

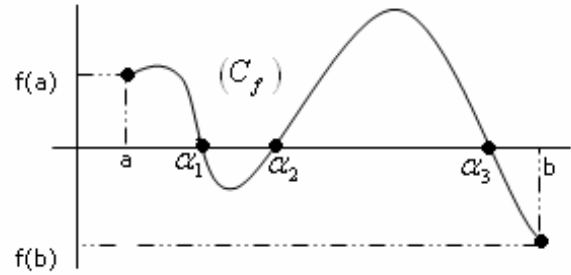
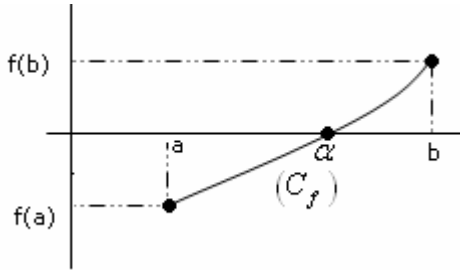
$$f(x) = \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

1- أحسب $f(2)$ و $f(3)$.

2- استنتج أن المعادلة : $f(x) = 1 + \sqrt{2}$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[2, 3]$.

2- استنتاج :



إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$. ومنه حسب مبرهنة القيم الوسطية، يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $]a, b[$ بحيث : $f(\alpha) = 0$.

نتيجة :

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ ؛

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a, b[$.

مثال 2 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - 2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$.

ملاحظة هامة :

إذا كانت f متصلة ورتبية قطاعا على مجال $[a, b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$ ؛ فإن

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل **حلا وحيدا** في المجال $]a, b[$.

مثال 3 : نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x^3 - 2$$

بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1, 2]$.

IV- تطبيقات :

A- دالة الجذر من الرتبة n . ($n \geq 1$) :

مثال تمهيدي : ليكن a من \mathbb{R}^+ .

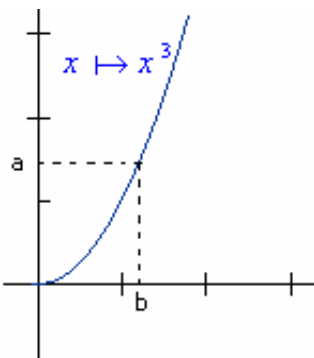
نلاحظ أن لكل a من \mathbb{R}^+ ؛ يوجد عنصر وحيد b من \mathbb{R}^+ بحيث : $b^3 = a$.
العدد الحقيقي الموجب b يسمى الجذر من الرتبة 3 للعدد a ويرمز له بالرمز

$$b = \sqrt[3]{a} \text{ . أي : } \forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, b^3 = a \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{a}$$

سؤال : حدد الجذور التالية : $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[3]{27}$ و $\sqrt[3]{64}$ و $\sqrt[3]{125}$.

✓ الدالة $x \mapsto x^3$ متصلة وتزايدية قطاعا على \mathbb{R}^+ . إذن فهي تقابل

من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ . تقابلها العكسي هو الدالة المعرفة بما يلي :



$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

1. الحالة العامة : ليكن $n \geq 1$.

✓ ليكن $a \in \mathbb{R}^+$. يوجد عنصر وحيد b من \mathbb{R}^+ بحيث : $b^n = a$. العدد الحقيقي الموجب b ، يسمى الجذر من الرتبة n للعدد a ويرمز له بالرمز $\sqrt[n]{a}$ ونكتب : $b = \sqrt[n]{a}$. ولدينا :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall b \in \mathbb{R}^+, b^n = a \Leftrightarrow b = \sqrt[n]{a}} \quad \checkmark \text{ قاعدة التحويل :}$$

✓ الدالة $x \mapsto x^n$ متصلة ورتبية قطعاً على المجال \mathbb{R}^+ ؛ إذن فهي تقابل من \mathbb{R}^+ نحو \mathbb{R}^+ .

$$\sqrt[n]{} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

تقابلها العكسي هو الدالة :

مثال : بسط الجذور التالية : $\sqrt[4]{16}$ و $\sqrt[6]{64}$ و $\sqrt[3]{512}$.

2. خاصيات أولية :
i - لكل a من \mathbb{R}^+ ؛ لدينا : $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

ii - لكل a من \mathbb{R}^+ ؛ لدينا : $\sqrt[n]{a^n} = a$.

iii - الدالة $\sqrt[n]{}$ متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R}^+ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty \quad \text{- iv}$$

3. نتائج : ليكن n من \mathbb{N}^* . لدينا :

✓ لكل a من \mathbb{R}^+ ولكل b من \mathbb{R}^+ ؛ لدينا :

✓ لكل a من \mathbb{R}^+ ولكل b من \mathbb{R}^+ ؛ لدينا :

تمرين تطبيقي : حل في \mathbb{R} المعادلات التالية :

$$x^6 = 2 \quad \text{: iii} \quad . \quad x^5 = 32 \quad \text{: i}$$

$$x^8 = -1 \quad \text{: iv} \quad . \quad x^3 = -125 \quad \text{: ii}$$

4. العمليات على الجذور من الرتبة n :

ليكن n و p من \mathbb{N}^* ؛ وليكن a و b من \mathbb{R}^+ . لدينا :

$$\boxed{\begin{array}{ll} (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} & \text{: iv} \quad . \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a} & \text{: i} \\ (b \neq 0) : \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} & \text{: v} \quad . \quad \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a} & \text{: ii} \\ & . \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} & \text{: iii} \end{array}}$$

تمرين تطبيقي : ليكن a من \mathbb{R}^+ ؛ وليكن m و n من \mathbb{N}^* . بين أن :

$$\boxed{\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}}}$$

$$\text{مثال : بسط العدد التالي : } A = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8} \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt[3]{4}}$$

5. إتصال ونهاية مركبة دالة f ودالة الجذر من الرتبة n :
خاصيات :

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح (غير فارغ) I ؛ وليكن x_0 عنصراً من I ؛ وليكن $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ إذا كانت f متصلة وموجبة على I ، فإن $\sqrt[n]{f}$ تكون متصلة على I .

✓ إذا كانت f موجبة على I ، وكان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$) ؛ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

✓ إذا كانت f موجبة على I ، وكان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ؛ فإن : $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

مثال 1 : لتكن f الدالة العددية المعرفة كالآتي :

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2 - 4}$$

a. حدد D_f ، حيز تعريف الدالة f .

- b. بين أن f متصلة في كل نقطة من حيز تعريفها .
 c. أحسب نهايتي f عند $+\infty$ و $-\infty$.

مثال 2 : أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x-2}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x-2}$.

6. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً :

i. **تعريف :** ليكن $a > 0$ ، وليكن r من \mathbb{Q}^* : $\left(r = \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{N}^* \right)$.

- ✓ نرمز بالرمز a^r للعدد الحقيقي $\sqrt[q]{a^p}$ ، يسمى **القوة الجذرية** ذات الأساس r للعدد الحقيقي a .
- ✓ إذا كان $r = 0$ ، فإن $a^r = 1$.

ملاحظات :

- ✓ 0^0 لا معنى له . $0^{\frac{5}{3}}$ لا معنى له .
- ✓ ليكن p من \mathbb{Z} و $q \in \mathbb{N}^*$. العدد الحقيقي الموجب قطعاً $\sqrt[q]{a^p}$ ، يكتب على الشكل $a^{\frac{p}{q}}$:

$$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

- ✓ ليكن r من $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. (مثلاً : $r = \frac{1}{7}$) .

- يكون العدد $f^r(x)$ معرفاً إذا وفقط إذا كان $f(x) \in \mathbb{R}$ و $f(x) > 0$.
 - **مثلاً :** يكون العدد $f^{\frac{1}{7}}(x)$ معرفاً إذا وفقط إذا كان $f(x) \in \mathbb{R}$ و $f(x) > 0$.
- ii. **خصائص :** ليكن a و b من \mathbb{R}^{+*} وليكن r و r' من \mathbb{Q} . لدينا :

$(a^r)^{r'} = a^{rr'}$:iv	$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}$:i
$a^r b^r = (ab)^r$:v	$\frac{1}{a^r} = a^{-r}$:ii
$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$:vi	$\frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'}$:iii

مثال : أحسب باستعمال هذه الخصائص العدد : $A = \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{8} \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt[3]{4}}$.

تمرين تطبيقي : حدد مجموعة تعريف كل من الدوال التالية :

$$f(x) = (x-5)^{\frac{2}{3}} :c \quad . \quad f(x) = (\sqrt[3]{x-5})^2 :b \quad . \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-5)^2} :a$$

سؤال : بسط العدد التالي : $B = \sqrt[4]{(\sqrt{7}-5)^4}$.

B- دالة قوس الظل Arctan :

$$f : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$x \mapsto \tan(x)$

$f(I) = \mathbb{R}$ المجال I نحو المجال \mathbb{R} . إذن : f تقابل من I نحو المجال \mathbb{R} . $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

1. خاصية وتعريف :

لدالة $\tan(x) \mapsto x$ تقابل من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نحو \mathbb{R} .

تقابلها العكسي ، يسمى **دالة قوس الظل** ويرمز له بالرمز

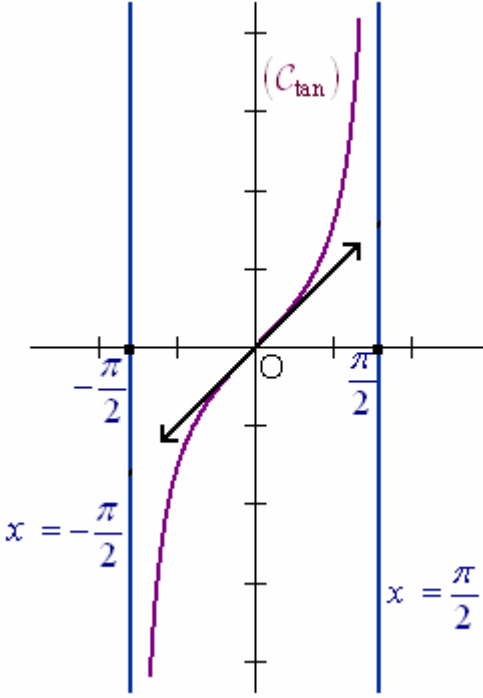
$$\text{Arc tan} : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \mapsto \text{Arc tan}(x)$$

2. قاعدة التحويل :

$$\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ ، ولكل } y \text{ من } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\text{ ، لدينا :}$$

$$y = \text{Arc tan}(x) \Leftrightarrow x = \tan(y)$$



مثال 1 : أحسب ما يلي : $\text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ و $\text{Arc tan}(\sqrt{3})$

مثال 2 : أحسب $\tan\left(\frac{17\pi}{4}\right)$ ؛ ثم استنتج $\text{Arc tan}(1)$.

3. نتائج :

a. لكل x من \mathbb{R} ؛ لدينا :

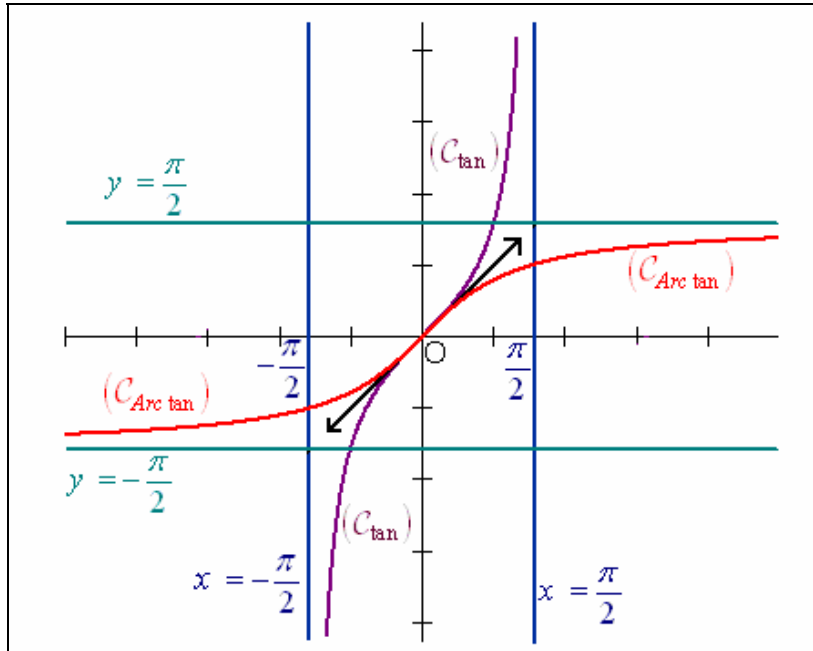
$$\boxed{\tan(\text{Arc tan}(x)) = x}$$

b. لكل x من $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ؛ لدينا :

$$\boxed{\text{Arc tan}(\tan(x)) = x}$$

c. الدالة Arc tan متصلة وتزايدية قطعاً على \mathbb{R} .

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arc tan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2}$.



مثال : أحسب ما يلي : $\text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{2006\pi}{3}\right)\right)$ ؛ $A = \text{Arc tan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \text{Arc tan}(-x) = -\text{Arc tan}(x)}$$

4. خاصية : الدالة Arc tan دالة فردية :